januari 2001 ~ nr 4 ~ jaargang 76

Kindertijdschriften als Wisconstighe Vermaecklykheid



EUCLIDES
Vakblad voor de wiskundeleraar

orgaan van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren



4

JANUARI 2001 JAARGANG 76

Euclides is het orgaan van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren. Het blad verschijnt 8 maal per verenigingsjaar.

Artikelen/mededelingen

Artikelen en mededelingen naar:
Kees Hoogland
Veldzichtstraat 24, 3731 GH De Bilt
e-mail: redactie-euclides@nvvw.nl

Richtlijnen voor artikelen:

• goede afdruk met illustraties/foto's/ formules op juiste plaats of goed in de tekst aangegeven.
• platte tekst op diskette of per e-mail: WP, Word of ASCII.
• illustraties/foto's/formules op aparte vellen: genummerd, zwart/wit, scherp contrast.

Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

www.nvvw.nl

Voorzitter
Drs. M. Kollenveld
Leeuwendaallaan 43, 2281 GK Rijswijk
tel. 070-3906378
e-mail: M.Kollenveld@nvvw.nl
Secretaris
W. Kuipers
Waalstraat 8, 8052 AE Hattem
tel. 038-4447017
e-mail: W.Kuipers@nvvw.nl
Ledenadministratie
Mw. N. van Bemmel-Hendriks
De Schalm 19, 8251 LB Dronten
tel. 0321-312543
e-mail: ledenadministratie@nvvw.nl

Colofon

ontwerp Groninger Ontwerpers
produktie TiekstraMedia, Groningen
druk Giethoorn Ten Brink, Meppel

Contributie

Contributie per ver. jaar: *f* 80,00
Studentleden: *f* 40,00
Leden van de VVWL: *f* 55,00
Lidmaatschap zonder Euclides: *f* 55,00
Betaling per acceptgiro. Nieuwe leden geven zich op bij de ledenadministratie.
Opzeggingen vóór 1 juli.

Abonnementen niet-leden

Abonnementen gelden steeds vanaf het eerstvolgende nummer.
Abonnementsprijs voor personen: *f* 85,00 per jaar.
Voor instituten en scholen: *f* 240,00 per jaar.
Betaling geschiedt per acceptgiro.
Losse nummers op aanvraag leverbaar voor *f* 30,00. Opzeggingen vóór 1 juli.

Advertenties

Informatie, prijsopgave en inzending:
L. Bozuwa, Merwekade 90
3311 TH Dordecht, tel. 078-639 08 90
fax 078-6390891
e-mail: lbozuwa@worldonline.nl
of F. Mahieu, Dommeldal 12
5282 WC Boxtel, tel. 0411-67 34 68

INHOUD

Door omstandigheden ontbreekt in dit nummer de rubriek Recreatie.

Rectificatie
Bij het artikel Millenniumvergissing in het vorige nummer (Euclides 76-3, p. 124) is de naam van de auteur niet juist vermeld. Deze moet luiden *Jan Zuidhoek*. In de tweede figuur bij dit artikel is het woordje 'begin' misplaatst. De eindredacteur biedt hiervoor zijn excuses aan.

[Van de redactietafel]

De redactie maakt van deze mogelijkheid gebruik u allen een creatief, inspirerend en gezond nieuwjaar toe te wensen. Voor sommigen is dit jaar heel bijzonder: zij zien dit jaar als het *echte* begin van het derde millennium. Belangrijkste gebeurtenissen het komend jaar zijn de start van de derde klas vmbo en de eerste landelijke eindexamens Tweede fase voor het vwo. Over beide zaken zullen we u het komend jaar via Euclides weer uitgebreid informeren.

Lustrumcongres
Het lustrumcongres van de Vereniging in november was een groot succes. Honderden wiskundeleraren hebben dit tweedaagse congres bezocht. In dit nummer treft u een impressie aan. Het toont aan hoe rijk en levend het wiskundeonderwijs heden ten dage nog steeds is. De foto's zijn van de hand van Ron Lambriex.
Het congres werd opgeluisterd door een bezoek van minister Hermans zelf. Aan hem werd het eerste exemplaar van het lustrumboek overhandigd.
Een lustrumboek dat geen enkele wiskundedocent eigenlijk mag missen. Het boek geeft een prachtig caleidoscopisch overzicht over het wiskundeonderwijs in de vorige eeuw.

Havo/vwo
In het vorige nummer van Euclides zijn alle maatregelen rond de Tweede Fase nog eens op een rijtje gezet. En dan merk je weer hoe lastig het is om alles bij te houden. Zoals menig goed ingevoerde collega al direct opmerkte: ook de domeinen die niet getoetst worden op het Centraal Examen in 2002 zijn al bekend. Ze zijn bekendgemaakt in Uitleg 18b van 26 juli 2000. Het gaat daarbij om (sub)domeinen die ook op het examen van 2001 uitgesloten zijn:
Vwo wiskunde A1 en A12: Grafen en matrices
Havo wiskunde A12: De binomiale verdeling
Er is in die Uitleg bovendien het *voornemen* geuit dat dit ook zal gelden voor het Centraal Examen van 2003. Of dit voornemen ook werkelijkheid wordt, zal de CEVO besluiten nadat de examens van 2001 achter de rug zijn.
U weet natuurlijk ook, dat op de website van de Vereniging dit soort wijzigingen altijd zeer up-to-date worden bijgehouden: *http://www.nvvw.nl.*

Regionale studiebijeenkomsten
De Vereniging blijft natuurlijk ook in 2001 actief. In maart en april worden in ieder geval weer de regionale studiebijeenkomsten gehouden.
U kunt alvast de volgende data noteren:
- donderdag 29 maart in Leiden,
- woensdag 4 april in Eindhoven,
- dinsdag 10 april in Zwolle.

Binnenkort zult u in Euclides, en natuurlijk ook op onze website, daarover meer informatie kunnen vinden.

In memoriam Dirk Jan Struik
Op 21 oktober jongstleden is op 106-jarige leeftijd D.J. Struik overleden. Dirk Struik is het meest bekend geworden door zijn publicaties over de geschiedenis van de wiskunde.
In het eerdergenoemde lustrumboek van de Vereniging kunt u nog een bijdrage van zijn hand vinden. Heel bijzonder om iemand herinneringen te horen ophalen van zijn middelbare schooltijd tussen 1906 en 1911!
In een komend nummer van Euclides zullen we nog veel uitgebreider stil staan bij deze markante persoon en diens betekenis voor het wiskundeonderwijs.

Kees Hoogland

Wisconstighe Vermaecklykheden V

[Danny Beckers]



Recreatieve wiskunde in Nederland

in de 19de eeuw: Kindertijdschriften

Mijn speelen is leeren, mijn leeren is speelen,
En waarom zou mij dan het leeren verveelen?
Het lezen en schrijven verschaft mij vermaak,
Mijn hoepel, mijn priktol verruil ik voor boeken;
Ik wil in mijn prenten mijn tijdverdrijf zoeken,
't Is wijsheid, 't zijn deugden, naar welken ik haak. [1]

Dit gedichtje, 'Het vrolijke leeren' van Hiëronymus van Alphen uit 1779, zou in de loop van de negentiende eeuw in talloze herdrukken aan kinderen worden voorgelegd. De idealen van een belangrijk deel van de sociale middenklasse ten aanzien van haar kroost kwamen er op pregnante wijze in naar voren. Spelen en leren lagen direct in elkaars verlengde, evenals kennis en deugd. Sinds het einde van de achttiende eeuw kwamen er kindertijdschriftjes op de markt, waarin deze idealen daadwerkelijk tot uitdrukking werden gebracht. In de negentiende eeuw gingen kindertijdschriften een belangrijke rol spelen: met name gedurende de tweede helft van de eeuw namen ze in aantal en diversiteit toe. Meestal speelde reken- of wiskunde in deze tijdschriften een rol [2]. Tussen 1852 en 1905 verscheen bijvoorbeeld wekelijks *De Kinder-Courant*, waarin naast verhalen, anekdoten, gedichten en mooie prenten ook elke week een paar rekenopgaven stonden.

De opgaven

In het opvoedingsideaal van de Verlichte negentiende-eeuwer nam de wiskundige vorming van de kinderen een niet onbelangrijke plaats in. In de vorm van prijsvragen en gewoon als vermakelijkheden werden wiskundige opgaven van allerlei vorm in tijdschriften voor kinderen geplaatst. Op kleine schaal zien we dit voor het eerst tegen het einde van de achttiende eeuw. In het *Weekblad voor Neêrlands Jongelingschap* werden sinds 1784 af en toe rekenkundige raadsels opgenomen. Dat waren bijvoorbeeld vragen over een boer die voor een gegeven bedrag op de markt honderd dieren ging kopen in drie categorieën. De vraag was dan hoeveel hij er van elk kocht. Of er oplossingen op binnenkwamen is niet duidelijk [3]. In de loop van de negentiende eeuw werden reken- en wiskundeopgaven in kindertijdschriften eerder regel dan uitzondering. Het *Hollandsch Penningmagazijn voor de Jeugd* beperkte zich uitsluitend tot historische en zedekundig/godsdienstig verantwoorde verhalen, maar de meeste tijdschriften boden daarnaast tevens wiskundig vermaak. *Philopaedion*, dat in de jaren '20 van de negentiende eeuw enige populariteit genoot, koppelde de rekenkundige vragen graag aan historische gebeurtenissen. Bij een gezocht getal werd bijvoorbeeld gegeven:

Om de twee eerste cijfers van dit getal te vinden, neme men anderhalf maal de beide laatste; telt hierbij op het jaartal, waarin zich Abimelech tot Koning opwierp, en trekt uit dezen som den Kubiekwortel ... [4]

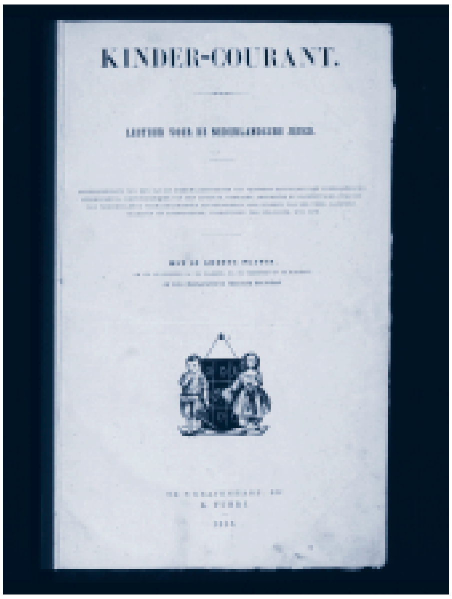
Het tijdschrift *Philarete* had zelfs enige tijd een aparte bijlage met 'vermakelijke vragen': *De Duizend–kunstenaar*. In deze bijlage stonden ook andere vragen, maar een belangrijke plek was ingeruimd voor wiskunde. De opgaven sloten aan bij het onderwijs, en werden met behulp van wat algebra opgelost.
Bijvoorbeeld: twee personen hebben appels; de één heeft er drie en de ander vijf. Ze delen de appels met een derde persoon die geen appels bezit, zodanig dat ze alle drie even veel eten. De derde persoon geeft de beide eersten in ruil voor hun goedgevigheid 2 gulden: wat is in deze situatie een eerlijke verdeling van het bedrag over die twee ex-appelbezitters [5]?
In de tweede helft van de negentiende eeuw werd het zogenaamde nummerraadsel populair. De oplossing van een dergelijk raadsel was een woord, waarvan de letters door middel van een oplopende cijferrij (beginnend bij 1) waren genummerd. Vervolgens werd de kinderen een serie aanwijzingen gegeven, bijvoorbeeld:

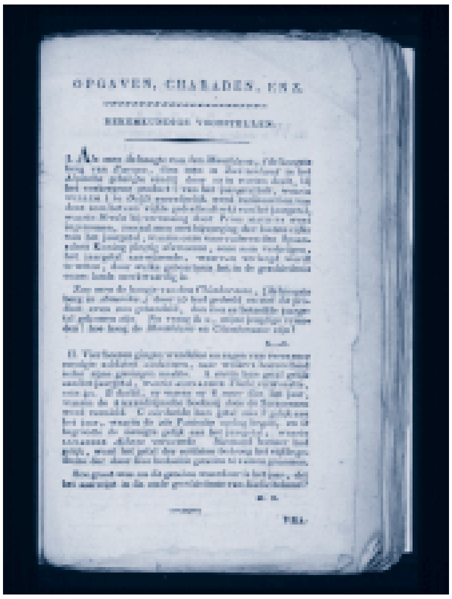
1, 4, 14 en 3, 13, 6, 8 zijn verkorte jongensnamen.
De 1, 13, 8 en de 9, 7, 11 zijn kledingstukken.
De 3, 2, 14, 11 vindt men in Zeeland.
De 3, 10, 11 is een klein huis,
De 12, 4, 13, 5 is een hemellichaam.

Opgelost moesten de gevonden letters de naam van een van de medewerkers van het tijdschrift vormen. Aardig detail is dat in de opgaven soms uitdrukkingen als 2 = 10 voorkwamen. Ook opgaven als: 'Hoeveel is anderhalf derde gedeelte van een halven pannekoek' bleven in trek [6]. Meetkundige opgaven komen beduidend minder voor. Verder dan een verzameling veelhoeken die tot een rechthoek aaneengesloten moeten worden gaan de meeste tijdschriften niet. Alleen het tijdschrift *Voor 't Jonge Volkje* stelde zijn lezers in een wedstrijd wel eens vragen als: een vierkant en een zeshoek (zelfs wel eens twee cirkels) te construeren die zich in oppervlakte verhouden als 4 tot 3 [7].

Spelen is leren

Het oplossen van dergelijke opgaven werd sinds het begin van de negentiende eeuw sterk gestimuleerd. Voor de weinige opgaven die in de achttiende-eeuwse kindertijdschriften stonden bestaan daarvoor geen aanwijzingen. Een aankondiging van het tijdschrift *Rekenlust* in 1859 was voor een recensent aanleiding om er bij de ouders op aan te dringen hun kinderen toch vooral antwoorden te laten insturen en hen niet alleen te laten intekenen [8]. Daar had hij een zeer gewichtige reden voor:


KINDER-COURANT.


OPGAVEN, CHARADES, ENZ.

Het is waar, sommigen mogen zich oefenen zonder daarvan te doen blijken in de lijst der medewerkers; doch in den regel gaat die medewerking niet met dien ijver vergezeld, welke de anderen bezielt wanneer nog de laatsten ontbreken, en hoeveel leeren zij niet bij het onderzoek, dat in 't werk wordt gesteld om de zwarigheden te overwinnen, die hun in de oplossing der overschietende vraagstukken nog in den weg staan [9].

Het vermaak diende dus gepaard te gaan met leren, zoals vele pedagogen in de negentiende eeuw vonden. Het versje van Van Alphen bovenaan dit stuk illustreert deze gedachte.
Ook de rekenkundige vragen in *Philopaedion* werden gewaardeerd, juist omdat ze het geheugen 'op zouden scherpen' [10]. Het tijdschrift *De Kindervriend*, dat sinds 1862 het licht zag, beloofde op het voorblad prijzen voor degene die de meeste goede antwoorden instuurde en stelde als eis dat met name de rekenkundige vragen behoorlijk moesten zijn uitgewerkt. De rekenopgaven in dit laatste tijdschriftje waren naar de mening van een recensent 'met tact gekozen' en werden zeer gewaardeerd [11].
In de loop van de negentiende eeuw verbeterde het onderwijs in de wiskunde zodanig, en raakte dermate wijdverspreid, dat ook grappig bedoelde bewijzen de kop opstaken, en kinderen werden gestimuleerd dingen te onderzoeken. Ook in kindertijdschriften kwamen vragen voor waartoe enig inzicht vereist was. Een aardige vermenigvuldiging stond onder de titel 'Chineesche Ruit' bijvoorbeeld in *De Kindervriend* van februari 1875:

$$\begin{array}{r} 76985 \\ \underline{47923} \\ 20 \\ 3235 \\ 365645 \\ 24637210 \\ 2842811615 \\ 49541824 \\ 631227 \\ 1418 \\ \underline{21} \\ 3689352155 \end{array}$$

De kinderen werd gevraagd om uit te zoeken hoe deze vermenigvuldiging in zijn werk was gegaan, en vervolgens de truc na te spelen met de getallen 76549 en 27685 [12].

Recreatie of gedwongen educatie?

Omdat het om kinderen gaat, dringt zich hier de vraag op we hier wel van recreatieve wiskunde kunnen spreken. In hoeverre werd de kinderen in de negentiende eeuw deze vorm van vermaak opgedrongen? Voor de ouders uit de sociale middenklasse zat er een zeer serieuze ondertoon aan het wiskundig vermaak [13], die zij mogelijk op haar kroost trachtte te projecteren. Mogelijk waren deze ouders te zeer verblind door de waarde die zij zelf aan het nieuwe schoolvak hechtten, om de desinteresse van hun kinderen te kunnen waarnemen.
In de negentiende eeuw waren het uiteraard de ouders die geschikt leesvoer voor hun kinderen uitzochten. Daar dient bij te worden opgemerkt dat er ouders waren die hun kinderen stimuleerden, of in sommige gevallen zelfs dwongen, een dagboek bij te houden [14].
We mogen omgekeerd ook niet uitsluiten dat het



WEEKBLAD

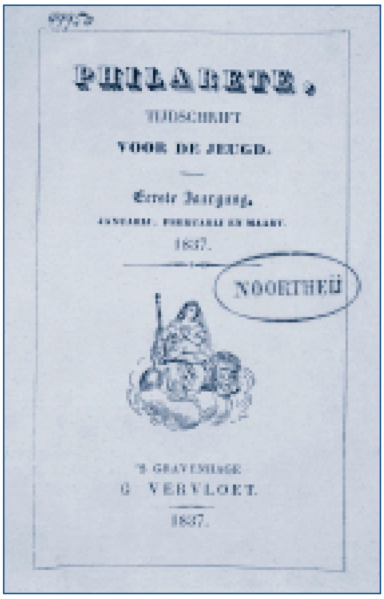
VOOR

NEËRLANDS

JONGELINGSCHAP.

N° 33, den 14 Aug. 1783.

OVER DEN STERRENHEMEL.



PHILARETE,

TIJDSCHRIFT

VOOR DE JEUGD.

Eerste Jaargang.

1837.

'S GRAVENHAGE

G. VERVLOET.

1837.

enthousiasme waarmee een groot deel van de middenklasse zich op de wiskunde stortte een positief effect had op de interesse van de kinderen. Maar daarbij moet deze kanttekening op zijn minst gemaakt worden: het ging om een zeer specifieke groep (kooplui, schoolmeesters, ingenieurs) die deze recreatieve wiskunde voor kinderen kocht: de kinderen kochten het niet zelf. In het begin van de twintigste eeuw werd er door didactici veel gemopperd dat opgaven in de rekenboekjes vaak te moeilijk waren voor de leerlingen [15]. Men kan zich bij deze kritiek, ook bij enkele van de recreatief bedoelde opgaven hierboven wel wat voorstellen.

Alternatieven

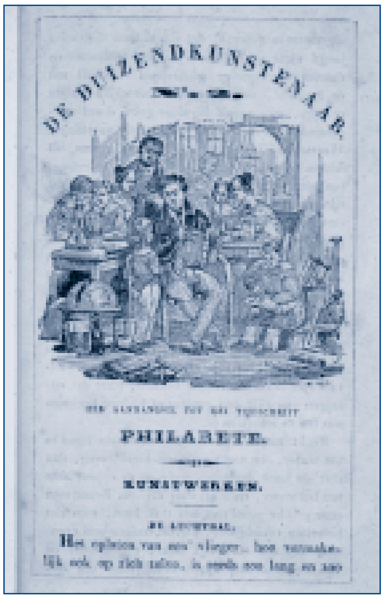
Wanneer we afgaan op wat ons nog aan kinderboeken en tijdschriften rest uit de vorige eeuw, waren er voor de kinderen maar erg weinig alternatieven. Al was het maar in de vorm van een prijsvraag, wiskunde dook steeds weer op in de tijdschriften voor de jeugd. De echte kwajongen wist misschien zijn handen te leggen op een centsprent, maar dat was vermaak van een hele andere orde. *De Snakenburgsche Courant* was waarschijnlijk de schrik van elk rechtgeaard opvoeder. Wanneer en met welke regelmaat dit werkje verscheen valt niet meer na te gaan: de nog bestaande exemplaren zijn gedateerd vanaf 1971. Zelfs de datering namen de auteurs niet serieus. Zij afficheerden het boekje met het volgende gedichtje:

Koomt, Ouden, Jongen, kreupelen, manken,
Gezonden, zieken, mallen, kranken,
Podegratisten, al den brui,
't Zy Rykaards, of gemeene lui;
Van wat professie Gy meugd wezen,
Hier kunt Gy weder grollen lezen,
Maar wagt doch hier geen werk van smaak,
't Is slegts geschreven tot vermaak. [16]

In dit periodiek stonden flauwe advertenties van makelaar Wibo Wasseneus, die een huis wilde verkopen aan de laagst biedende.
Wie dergelijke tijdschriftjes lazen is niet duidelijk. Mogelijk dat sommige kinderen een exemplaar van deze 'courant', of van het *Magazijntje van geloofwaardige geschiedenissen*, kochten, om de stichtelijke boeken en tijdschriften (vol recreatief bedoelde wiskunde) die zij van hun ouders kregen, enigszins te compenseren.

Conclusies

In hoeverre de kinderen in de negentiende eeuw zich op recreatieve wijze met wiskunde bezig hielden valt niet te zeggen. Zeker is dat veel ouders hun kroost stimuleerden zich met wiskunde te vermaken, in de hoop dat zij er op een aangename wijze veel van zouden leren. Zodoende bestaat er een zeer uitgebreide verzameling wiskundige vermaken speciaal ontworpen voor de negentiende-eeuwse jeugd en gewaardeerd door de sociale middenklasse die de tijdschriften kocht. Met dat gegeven in het achterhoofd is het in elk geval niet


DE DUIZENDKUNSTENAAR.

PHILARETE.

KUNSTWERKEN.


DE KINDERVRIEND.

WEEKBLAD VOOR DE KATHOLIEKE JEUGD

J. W. THOMPSON.

KALENDER.


DE BLYDE TERUGKOMST

VAN DEN

SNAAKENBURGSCHEN

COURANTIER

uit het Ryk der Schimmen.

EERSTE SAMENSPRAAK;

tusschen Hem en zyn Baas,

GOVERT MALIHABUS;

6081.

vreemd dat Multatuli in zijn *Ideeën* met een 'nieuw' bewijs voor de stelling van Pythagoras op de proppen komt: blijkbaar had hij wel genoten van zijn wiskundige vermaken.

Noten

[1] Hiëronymus van Alphen, Proeve van kleine gedigten voor kinderen, Utrecht (1779), p. 11

[2] P.J. Buijnsters, e.a. (red.), De hele Bibelebontse berg, Amsterdam (1989), pp. 284-287; helaas gaan de auteurs helemaal niet in op reken- en wiskunde in de kinderboeken en tijdschriften.

[3] Weekblad voor Neêrlands Jongelingschap I (1783) - IV (1786)

[4] Philopaedion, tijdschrift voor de jeugd 1825 nr. 2, pp. 144-145

[5] De Duizendkunstenaar nr. 14 (1840), pp. 238-239

[6] De Kindervriend. Weekblad voor de Katholieke Jeugd III nr. 10 (11 Maart 1877), p. 80 respectievelijk I nr. 7 (14 februari 1875), p. 56

[7] Voor 't Jonge Volkje XV (1889), wedstrijden A en B op de achterkant van de omslag

[8] Bij intekening beloofde de afnemer bij elke uitgave een exemplaar af te nemen. Er werd dus niet vooraf, voor het verschijnen van een tijdschriftnummer, betaald: de voortzetting van een tijdschrift kon niet gegarandeerd worden, laat staan dat ieder nummer of jaargang ongeveer dezelfde omvang zou hebben. Het abonnementsgeld is iets dat pas na de eerste wereldoorlog meer gewoon werd.

[9] Vaderlandsche Letteroefeningen 1859-I, p. 341

[10] Onder andere in de bespreking van jaargang 1823 in de Vaderlandsche Letteroefeningen 1825-I, p. 184 en in De Recensent, ook der Recensenten XVI (1823) dl. 1, pp. 501-504

[11] Vaderlandsche Letteroefeningen 1862-III, pp. 232-235

[12] De Kindervriend. Weekblad voor de Katholieke Jeugd I nr. 7 (14 februari 1875), p. 56

[13] Zie deel 4 in deze serie, in: Euclides 75 nr. 8 (juni 2000), pp. 277-281

[14] Rudolf Dekker en Jurgen Limonard, 'The diary of A. van Goldtstein (1801-1808): an early adolescent diary' in: Paedagogica Historica XXIX (1993), pp. 151-164

[15] C. Mommers en G. Janssen, Zwijsen. Een passie voor uitgeven, Tilburg (1997), p. 219

[16] Snaakenburgsche Courant (of de kleinzoon van den Courier uit Lapland; binnen gezeild op den 2de van Januarius 4083, mede brengende een aantal verbazende Nieuwstydingen van het Land der Kwiebussen), p. 2

Onderwijshervormingen: de evolutie van een wiskundig vraagstuk

[N.N.]

Onderwijs in 1960

Een boer verkoopt een zak aardappelen voor *f* 10,00. Zijn productiekosten bedragen 4/5 van de verkoopprijs. Hoe groot is zijn winst?

Traditioneel onderwijs in 1970

Een boer verkoopt een zak aardappelen voor *f* 10,00. Zijn productiekosten bedragen 4/5 van de verkoopprijs, dat wil zeggen *f* 8,00. Hoe groot is zijn winst?

Modern onderwijs in 1980

Een boer ruilt een verzameling A van aardappelen tegen een verzameling G van geld. Het kardinaalgetal van G is gelijk aan 100 en ieder element van G bestaat uit 1 dubbeltje.
Teken 100 dikke punten die de elementen van G vertegenwoordigen. De verzameling van de productiekosten heet P en bevat 80 punten uit de verzameling G.
Geef in een Venn-diagram de verzameling P aan als deelverzameling van G.
Geef ook het antwoord op de volgende vraag: wat is het kardinaalgetal van de verzameling W die de winst voorstelt (en arceer die verzameling met rood).

Vernieuwend onderwijs in 1980

Een agrariër verkoopt een zak aardappelen voor *f* 10,00. De productiekosten lopen op tot *f* 8,00 en de winst is dus *f* 2,00.
Opdracht: Onderstreep het woord aardappelen en discussieer hierover met je buurman/vrouw.

Hervormend onderwijs in 1980

Un bevoerregte kappitalistiese boer verreikt zich onregtmatug met *f* 2,00 aan nun zak aardappulu. Analyseer de tekst, zoek de taalfouten en zet, zo nodig, op de juiste plaatsen komma's en punten. Geef vervolgens je mening over de manier van verrijken afgezet tegen de rechten van de mens.

Computerondersteund onderwijs in 1990

Een producent in een agrarische omgeving heeft een on-line verbinding waarmee hij de dagprijs van aardappelen kan bekijken. Hij start zijn belastingaangiftendiskette en onderzoekt de cash-flow in een spreadsheet.
Teken met je muis de contouren van een zak aardappelen. Log vervolgens in op het schoolnetwerk met de code 3615ZA (zak aardappelen) en volg de instructies op het scherm.

Onderwijs in 2000

Ga vanuit je werknis naar de mediatheek. Zoek op Internet op: Wat is een boer?
Maak een verslag van deze praktische opdracht (met logboek).

[Hans Montanus]

Pi en het toeval

Er bestaan veel formules voor π. De twee bekendste zijn wellicht de formule van Leibniz: $\frac{\pi}{4} = \frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + ...$ en de formule van Euler: $\frac{\pi^2}{6} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + ...$ Dergelijke reeksen werden onder andere afgeleid om een zo nauwkeurig mogelijke benadering voor π te krijgen.

In de ijver naar steeds meer getallen achter de komma worden nog steeds nieuwe reeksen voor π ontwikkeld. Wie interesse heeft in dergelijke formules kan ze tegenwoordig ook vinden op het internet [1,2].
Bekend is ook dat het getal π ook optreedt bij toevalsexperimenten [3]. Een voorbeeld hiervan komt uit de getallentheorie:
Kies willekeurig twee gehele getallen. Dan is de kans dat ze geen gemeenschappelijke deler hebben gelijk aan $\frac{6}{\pi^2}$.
Een tweede voorbeeld dat vaak in de literatuur wordt aangehaald is het experiment van *De Buffon*. Dit toevalsexperiment is meer meetkundig van aard. Het experiment gaat als volgt:
Werp een naald met lengte d op een blad gelinieerd papier met onderlinge lijnafstand l. De kans dat de naald over een van de lijnen komt te liggen is dan gelijk aan $\frac{2d}{\pi l}$.
In plaats van met een naald kunnen we ook met een muntje gooien, of werken met een gelijkzijdige driehoek of een vierkant. We generaliseren het experiment als volgt: Neem een stuk stevig papier of karton en teken daarop een cirkel met diameter d. Construeer binnen de cirkel een regelmatige veelhoek zodanig dat de hoekpunten van de veelhoek op de rand van de cirkel liggen. Knip de regelmatige veelhoek uit en werp deze op een blad gelinieerd papier waarvan de onderlinge lijnafstand groter is dan de diameter van de oorspronkelijke cirkel. Na enig rekenwerk vinden we de volgende formule voor de kans p_n dat de regelmatige n-hoek op een van de lijnen komt te liggen:

$$p_n = \frac{dn}{l\pi} \sin\left(\frac{\pi}{n}\right)$$

Voor de naald, $n = 2$, herkrijgen we de eerder genoemde kans $\frac{2d}{\pi l}$. Voor een munt, $n = \infty$, wordt de kans $\frac{d}{l}$, waarvan de juistheid direct valt in te zien.
Dit is misschien wel aardig als praktische opdracht. De leerlingen moeten zelf de figuren construeren en vervolgens het experiment een paar honderd keer uitvoeren. Ze kunnen zich daarbij de volgende vragen stellen. Kloppen de resultaten met de formule? Zo ja, hoe nauwkeurig kreeg je π en hoeveel keer had je daarvoor gegooid? Waarom is dit experiment het meest efficiënt als je d en l zo kiest dat p_n gelijk is aan $\frac{1}{2}$?
Misschien zijn er wel een paar wizz kids die het experiment willen simuleren met een computer–programma.

Random walk

Een derde voorbeeld waarbij π optreedt in een toevalsexperiment is de 'random walk'. Dat is een stapsgewijze wandeling die door het toeval wordt bepaald. We beperken ons tot een wandeling in één dimensie. Zeg maar, langs de x-as. Het experiment

begint met een wandelaar in de positie $x = 0$. De wandelaar werpt een zuivere munt. Bij *kop* gaat hij een eenheid naar rechts en bij *munt* een eenheid naar links. In de nieuwe positie wordt deze procedure herhaald: bij iedere stap werpt de wandelaar eerst de munt.
In de statistiek wordt meestal gekeken naar de verwachtingswaarden na n stappen van x, x^2, enzovoorts. Hoewel we gebruik zullen maken van het resultaat $E_n(x) = 0$ en $E_n(x^2) = n$, gaan we nu eens kijken naar de absolute afstand $r = |x|$.
Na de eerste stap is de wandelaar in $x = 1$ (1 manier) of in $x = -1$ (1 manier).
Voor de verwachtingswaarde van r na de eerste stap krijgen we dan $E_1(r) = (\frac{1}{2} + \frac{1}{2}) \cdot 1 = 1$.
Na twee stappen is de wandelaar in $x = 2$ (1 manier), $x = 0$ (2 manieren) of in $x = -2$ (1 manier).
De verwachtingswaarde van r na twee stappen wordt $E_2(r) = (\frac{1}{4} + \frac{1}{4}) \cdot 2 + \frac{2}{4} \cdot 0 = 1$.
Deze berekeningen kunnen onze leerlingen zelf; dus ook hier ligt een mogelijkheid voor een praktische opdracht.
Na drie stappen krijgen we $E_3(r) = \frac{2}{8} \cdot 3 + \frac{6}{8} \cdot 1 = \frac{3}{2}$.
Op dezelfde wijze vinden we $E_4(r) = \frac{3}{2}$.
Verder doorrekenen geeft

$$E_5(r) = E_6(r) = \tfrac{15}{8},\ \ E_7(r) = E_8(r) = \tfrac{35}{16},$$

$$E_9(r) = E_{10}(r) = \tfrac{315}{128}, \ldots$$

Wanneer de wandelaar n stappen neemt, kan hij dat op 2^n verschillende manieren doen.
Bij $\binom{n}{i}$ manieren hiervan arriveert de wandelaar op de positie $(n - 2i)$. De algemene uitdrukking voor de verwachtingswaarde van de absolute afstand na n stappen is dan:

$$E_n(r) = \sum_{i=0}^{n} \frac{|n - 2i|}{2^n} \binom{n}{i} \qquad (1)$$

Wanneer we deze waarden uitzetten ontstaat de grafiek in *figuur 1*.
De grafiek in die figuur lijkt op een wortelverband. Als het inderdaad een wortelverband is, moet $E_n(r)^2/n$ voor toenemende n naar een constante waarde naderen. In de tabel van *figuur 2* is te zien hoe dat de eerste 10 stappen verloopt. Naarmate het aantal stappen groter wordt, lijken de getallen in de derde kolom steeds dichter naar 0,636619772... ofwel naar $2/\pi$ te naderen. Dat kan netjes worden bewezen door de binomiale verdeling te benaderen met de normale verdeling. Er geldt voor het gemiddelde $\mu = E_n(x) = 0$ en voor de standaarddeviatie

$\sigma = \sqrt{E_n(x^2)} = \sqrt{n}$. De normale verdeling heeft dan de vorm $p(x) = \sqrt{\dfrac{1}{2\pi n}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2n}}$

Voor de benadering van $E_n(r)$ met deze verdeling krijgen we dan

$$E_n(r) \cong \int_{-\infty}^{\infty} |x|\, p(x)\mathrm{d}x = 2\sqrt{\frac{1}{2\pi n}} \int_0^{\infty} x e^{-\frac{x^2}{2n}} \mathrm{d}x = \sqrt{\frac{2n}{\pi}}$$

Bij benadering geldt dus $\dfrac{E_n(r)^2}{n} \cong \dfrac{2}{\pi}$.

Wegens de centrale limietstelling gaat in de limiet $n \to \infty$ de binomiale verdeling over in de normale verdeling. In deze limiet wordt bovenstaande berekening dus exact,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{E_n(r)^2}{n} = \frac{2}{\pi} \qquad (2)$$

waarmee de convergentie naar $2/\pi$ is bewezen.
In de vierde kolom van de tabel in *figuur 2* staan de getallen waarmee de termen $E_{n-1}(r)^2/(n - 1)$ moeten worden vermenigvuldigd om de termen $E_n(r)^2/n$ te krijgen. Deze getallen vertonen een mooie regelmaat. Dat die regelmaat altijd doorgaat kan worden afgeleid door de uitdrukking (1) uit te schrijven en met behulp van de bekende combinatorische regels

$$i \cdot \binom{n}{i} = n \cdot \binom{n-1}{i-1} \quad \text{en} \quad \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} = 2^n$$

te vereenvoudigen. Voor een even aantal stappen, $n = 2m$, volgt dan dat

$$E_{2m}(r) = 2\sum_{i=0}^{m-1} \frac{2m - 2i}{2^{2m}} \binom{2m}{i} = \ldots = \frac{2m}{2^{2m}} \binom{2m}{m} \qquad (3)$$

Evenzo volgt voor een oneven aantal stappen, $n = 2m - 1$, dat

$$E_{2m-1}(r) = 2\sum_{i=0}^{m-1} \frac{2m - 1 - 2i}{2^{2m-1}} \binom{2m-1}{i} = \ldots = \frac{2m}{2^{2m}} \binom{2m}{m} \qquad (4)$$

Zoals we al zagen aan de eerste kolom in *figuur 2*, is de verwachtingswaarde van r na $2m$ stappen net zo groot als na $2m - 1$ stappen. Zowel uit (2) en (3) als uit (2) en (4) volgt dat

$$\pi = \lim_{m\to\infty} \frac{16m}{m} \binom{2m}{m}^{-2}$$

Verder volgt uit (3) en (4) voor oneven n dat

$$\frac{E_n(r)^2}{n} = \frac{n}{n-1} \frac{E_{n-1}(r)^2}{n-1}$$

en voor even n dat

$$\frac{E_n(r)^2}{n} = \frac{n-1}{n} \frac{E_{n-1}(r)^2}{n-1}$$

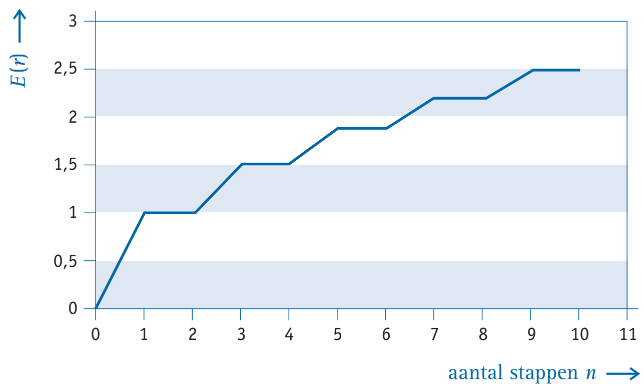
Hiermee is de regelmaat van de getallen in de vierde kolom van de tabel in zijn algemeenheid aangetoond. Als we $E_1(r)^2/1 = 1$ als beginterm nemen, dan geldt:

$$\lim_{m\to\infty} \frac{E_n(r)^2}{n} = 1 \cdot \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{3}{2} \cdot \tfrac{3}{4} \cdot \tfrac{5}{4} \cdot \tfrac{5}{6} \cdot \tfrac{7}{6} \cdot \tfrac{7}{8} \cdot \tfrac{9}{8} \cdot \tfrac{9}{10} \cdot \ldots$$

Vergelijken we dit met (2), dan leidt dat tot de volgende uitdrukking voor π:

$$\frac{\pi}{2} = \tfrac{2}{1} \cdot \tfrac{2}{3} \cdot \tfrac{4}{3} \cdot \tfrac{4}{5} \cdot \tfrac{6}{5} \cdot \tfrac{6}{7} \cdot \tfrac{8}{7} \cdot \tfrac{8}{9} \cdot \tfrac{10}{9} \cdot \ldots \qquad (5)$$

of kortweg $\dfrac{\pi}{2} = \displaystyle\prod_{k=1}^{\infty} \frac{4k^2}{4k^2 - 1}$.



n	$E_n(r)$	$E_n(r)^2$	$\frac{E_n(r)^2}{n} \cdot \frac{n-1}{E_{n-1}(r)^2}$
1	1	$\frac{1}{1} = 1$	
2	1	$\frac{1}{2} = 0{,}5$	$\frac{1}{2}$
3	$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{4} = 0{,}75$	$\frac{3}{2}$
4	$\frac{3}{2}$	$\frac{9}{16} = 0{,}5625$	$\frac{3}{4}$
5	$\frac{15}{8}$	$\frac{45}{64} = 0{,}703125$	$\frac{5}{4}$
6	$\frac{15}{8}$	$\frac{75}{128} = 0{,}5859375$	$\frac{5}{6}$
7	$\frac{35}{16}$	$\frac{175}{256} = 0{,}68359375$	$\frac{7}{6}$
8	$\frac{35}{16}$	$\frac{1225}{2048} = 0{,}598144531$	$\frac{7}{8}$
9	$\frac{315}{128}$	$\frac{11025}{16384} = 0{,}672912598$	$\frac{9}{8}$
10	$\frac{315}{128}$	$\frac{19845}{32768} = 0{,}605621338$	$\frac{9}{10}$

1

2

Deze uitdrukking voor π is niet nieuw. Ze staat al 350 jaar bekend als de oneindig productreeks van *Wallis*. Deze Engelse wiskundige heeft zijn formule voor p indertijd op een andere manier afgeleid. Dat kan ook niet anders, want *Gauss* werd pas na zijn dood geboren. Er zijn meer manieren om de formule van *Wallis* af te leiden [4]. Dat deze formule voor π op de hierboven beschreven wijze volgt uit de random walk, zal dan ook ongetwijfeld bekend zijn. Maar als je deze afleiding niet kent, is het toch aardig als je er bij toeval zelf achterkomt.
In ieder geval biedt het een mogelijkheid voor een praktische opdracht. Leerlingen kunnen zelf de verwachtingswaarden uitrekenen en een tabel opstellen. De regelmaat hierin moet met wat onderzoek te herkennen zijn. Vwo-NT leerlingen kunnen de integraal zelf uitrekenen; eventueel helpt de docent ze hier door de primitieve te geven. Al met al kunnen ze dan zelf *Wallis*' formule voor π afleiden en ontdekken hoe het getal π tevoorschijn kan komen in toevalsexperimenten.

Hogere machten

Door te kijken naar de verwachtingswaarde van r kregen we *Wallis*' formule voor π. Het is daarom de moeite waard om te kijken naar de verwachtingswaarde van r^3. De algemene uitdrukking hiervoor is:

$$E_n(r^3) = \sum_{i=0}^{n} \frac{|n-2i|^3}{2n} \binom{n}{i} \qquad (6)$$

Voor de benadering van $E_n(r^3)$ met de normale verdeling krijgen we, met partiële integratie,

$$E_n(r^3) \cong \int_{-\infty}^{\infty} |x|^3 p(x)\mathrm{d}x = 2\sqrt{\frac{1}{2\pi n}} \int_0^{\infty} x^3 e^{-\frac{x^2}{2n}} \mathrm{d}x = 2n\sqrt{\frac{2n}{\pi}}$$

Er geldt dus $\lim_{n\to\infty} \frac{E_n(r^3)^2}{n^3} = \frac{8}{\pi}$ (7)

In *figuur 3* is te zien hoe deze waarden bij de eerste 10 stappen verlopen.
De regelmaat is het gemakkelijkst te herkennen door te kijken naar de factor waarmee $E_{n-2}(r^3)^2/(n-2)^3$ moet worden vermenigvuldigd om $E_n(r^3)^2/n^3$ te krijgen. Aan de hand van de laatste kolom zien we dat voor even n deze factoren worden gegeven door $(n-1)^2/n(n-2)$.
Dat deze regelmaat altijd doorgaat, kan men weer nagaan door (6) helemaal uit te werken. Als we $E_2(r^3)^2/2^3 = 2$ als beginterm nemen, dan krijgen we:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{E_n(r^3)^2}{n^3} = 2 \cdot \frac{9}{8} \cdot \frac{25}{24} \cdot \frac{49}{48} \cdot \frac{81}{80} \cdot \frac{121}{120} \cdot \ldots$$

of kortweg $\lim_{n\to\infty} \frac{E_n(r^3)^2}{n^3} = 4 \prod_{k=1}^{\infty} \frac{4k^2-1}{4k^2}$

Vergelijking hiervan met (7) leidt dan direct tot uitdrukking (5) voor π, dus ook tot de formule van *Wallis*.
Het ligt nu voor de hand om ook naar de verwachtingswaarde van r^5, r^7, ... te kijken. Het blijkt echter dat de regelmaat daarin niet eenvoudig te herkennen is.

n	$E_n(r^3)$	$E_n(r^3)^2$	$\frac{E_n(r^3)^2}{n^3} \cdot \frac{(n-1)^3}{E_{n-1}(r^3)^2}$	$\frac{E_n(r^3)^2}{n^3} \cdot \frac{(n-2)^3}{E_{n-2}(r^3)^2}$
1	1	1		
2	4	2	2	
3	$\frac{15}{2}$	$\frac{25}{12} = 2{,}083333333$	$\frac{25}{24}$	$\frac{25}{12}$
4	12	$\frac{9}{4} = 2{,}25$	$\frac{27}{25}$	$\frac{9}{8}$
5	$\frac{135}{8}$	$\frac{729}{320} = 2{,}278125$	$\frac{81}{80}$	$\frac{2187}{2000}$
6	$\frac{45}{2}$	$\frac{75}{32} = 2{,}34375$	$\frac{250}{243}$	$\frac{25}{24}$
7	$\frac{455}{16}$	$\frac{4225}{1792} = 2{,}357700893$	$\frac{169}{168}$	$\frac{21125}{20412}$
8	35	$\frac{1225}{152} = 2{,}392578125$	$\frac{343}{338}$	$\frac{49}{48}$
9	$\frac{5355}{128}$	$\frac{354025}{147456} = 2{,}400885688$	$\frac{289}{288}$	$\frac{99127}{97344}$
10	$\frac{575}{128}$	$\frac{19845}{8192} = 2{,}422485352$	$\frac{1458}{1445}$	$\frac{81}{80}$

3

Oneindig

Enerzijds geldt $E_n(r^{2k+1}) = \sum_{i=0}^{n} \frac{|n-2i|^{2k+1}}{2^n} \binom{n}{i}$

Anderzijds kan, door middel van partiële integratie, worden afgeleid dat

$$E_n(r^{2k+1}) \cong \int_{-\infty}^{\infty} |x|^{2k+1} p(x)\mathrm{d}x =$$

$$2\sqrt{\frac{1}{2\pi n}} \int_0^{\infty} x^{2k+1} e^{-\frac{x^2}{2n}} \mathrm{d}x = k!(2n)^k \sqrt{\frac{2n}{\pi}}$$

ofwel $\frac{E_n(r^{2k+1})^2}{n^{2k+1}} = \frac{2}{\pi} 4^k (k!)^2$

Aldus verkrijgen we de volgende uitdrukking voor π:

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{n\to\infty} \frac{4^{n+k} nk!}{\left\{\sum_{i=0}^{n} |n-2i|^{2k+1} \binom{n}{i}\right\}^2}$$

Deze formule geldt voor ieder geheel getal $k \geq 0$. Dat zijn dus oneindig veel uitdrukkingen voor π.
Aangezien *Wallis* ook degene was die de wiskunde heeft voorzien van het symbool ∞ voor oneindig, is dit wel een aardige conclusie als besluit.

Noten

[1] http://www.mathsoft.com/asolve/constant/pi/srs.html

[2] http://www.mathsoft.com/asolve/plouffe/plouffe.html

[3] L. Berggren, J. Borwein en P. Borwein, Pi: A Source Book,1997, p. 400.
In het Nieuw Archief voor Wiskunde (september 2000, p. 254) is een artikel van Borwein verschenen waarin ook veel formules voor π voorkomen.

[4] www.multimania.com/bgourevitch/mathematiciens/wallis/wallis.html

Schaatsen

[Johan Verhoog]

Onderstaand artikel is geschreven als eindopdracht voor de cursus schaatstrainer.
Aanleiding voor dit werkstuk was een lezing door professor Van Ingen Schenau enkele jaren geleden op de Nationale Wiskunde Dagen. Herinneringen hieraan kwamen bij de schrijver weer boven tijdens de JSL-cursus (de cursus voor schaatstrainer) toen er over krachten bij het schaatsen gesproken werd.
Met dit werkstuk heeft de schrijver getracht deze moeilijke materie wat toegankelijker te maken voor medecursisten en in het bijzonder voor hemzelf.
Achtereenvolgens worden de volgende onderwerpen behandeld: de techniek van het schaatsen, de techniek van het rechte eind en als laatste enige theorie over de bochten.

De techniek van het schaatsen

Vergelijken we de techniek van het schaatsen met die van hardlopen, dan vallen enkele zaken op.
Ten eerste: een zeer goede hardloper zou de 100 meter in 10 seconden kunnen lopen. Vereenvoudig dit tot 10 m/sec, dan is dat een snelheid van 36 km/uur.
Een goede schaatser kan zeker snelheden van boven de 50 km/uur halen en dat ook nog over een 5 tot 15 maal zo lange afstand.
Ten tweede: kijken we naar de voeten, dan zien we dat bij een schaatser de voeten steeds naar voren blijven gaan. De voeten zullen ongeveer de snelheid van het lichaam hebben. Bij een hardloper staat de voet bij iedere pas als de voet op de grond komt stil. Zodra de voet landt, gaat het bovenlichaam de voet passeren. Daarna moet er extra energie geleverd worden, want de voet moet weer voor het bovenlichaam gebracht worden. Het been is dus steeds aan het versnellen en afremmen.
Het voordeel van schaatsen is dat het afremmen niet nodig is. Er gaat dus veel minder energie verloren.
Als er minder energie verloren, gaat moet er meer energie overblijven voor de voorwaartse beweging, dus

moet een schaatser sneller kunnen gaan dan een hardloper.

Zoals hierboven al is genoemd, staat bij een hardloper de voet bij iedere pas een ogenblik stil. Dit geeft de mogelijkheid om naar achteren af te zetten. Door het principe van actie = reactie ontstaat er een voorwaartse beweging.
Een schaatser, die al naar voren beweegt, kan niet naar achteren afzetten, omdat er geen vast punt is. Je zou kunnen zeggen dat het afzetpunt onder hem door naar achteren wegloopt. De schaatser maakt daarom gebruik van een zijwaartse afzet.
Ook op deze regel is een uitzondering, namelijk de start. De schaatser staat dan ook stil en zal wel naar achteren af moeten zetten om vooruit te komen. Zodra de snelheid te groot wordt, gaat het rennen over in glijden en komt de zijwaartse afzet.

Heb je een niet al te jonge groep schaatsers in je les, dan denk ik dat met een verhaal zoals hierboven beschreven is, duidelijk te maken is dat je niet naar achteren, maar zijwaarts moet afzetten.

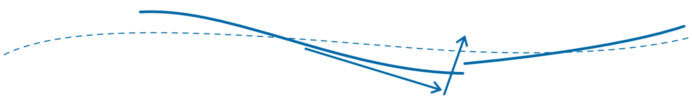
hoe dieper je zit, hoe langer je slag

De techniek van het rechte eind

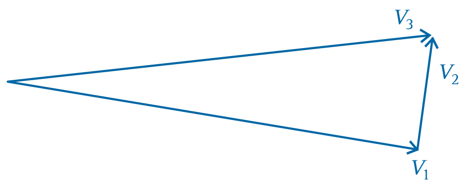
Hoe is het mogelijk, dat een zijwaartse afzet een voorwaartse beweging geeft?
Om dit duidelijk te maken moeten we met vectoren gaan werken. Een vector is een pijl, die richting en plaats van een kracht aangeeft, waarbij de lengte evenredig is met de kracht, die voorgesteld wordt.
Een schaatser gaat niet voorwaarts volgens een rechte lijn (dat zou toch de kortste weg zijn), maar volgt een slingerpad *(zie figuur 1)*.
De stippellijn stelt de baan van het lichaamszwaartepunt voor. Dit zit ongeveer bij de navel.
Er doorheen is links de baan van het rechter been getekend.
V_1 stelt de snelheid voor van het zwaartepunt *(zie figuur 2)*.
V_2 is de kracht die aan V_1 wordt toegevoegd door de zijwaartse afzet.
De som van deze twee krachten is V_3; $V_1 + V_2 = V_3$.
We zien nu, dat als gevolg van de slingerbeweging de zijwaartse kracht toch iets naar voren gericht is, waardoor er weer een grotere kracht V_3 ontstaat. Door de zijwaartse afzet wordt de snelheid dus steeds weer vergroot.

Op trainingen hoor je vaak roepen: ‘Dieper zitten!’ Laten we eens kijken waarom dat zo belangrijk is.
Ten eerste neemt de luchtweerstand af naarmate een schaatser dieper zit. Dit lijkt me volkomen duidelijk en zeker heel belangrijk als we bedenken, dat de weerstand die een schaatser moet overwinnen om vooruit te komen, ongeveer 80% luchtweerstand en dus voor maar 20% glijweerstand is.
Ten tweede wordt er dan vaak gezegd: hoe dieper je zit, hoe langer je slag is. Dat is wel juist, maar wat heb je

1



2



daar nu aan? Als je slag korter is, dan is je volgende slag toch weer sneller aan de beurt! Per ronde maakt iemand met een hogere zit, en dus kortere slag, meer slagen. Veel slagen met een kortere slag en weinig slagen met een langere slag zullen per ronde in totaal toch niet veel verschillen in afzettijd. Dus daar kan de winst niet zitten, maar waar dan wel?

In *figuur 3* en in *figuur 4* staat een schematische weergave van een schaatser.
Hierin is: GV_R = rechter been; GV_L = linker been; G = lichaamszwaartepunt.

Uit deze figuren kunnen we aflezen dat de hoek α die het afzetbeen met het ijs maakt, kleiner is naarmate de schaatser dieper zit. We nemen voor het gemak even aan dat de afzetkracht F gelijk blijft. F_z zien we nu kleiner worden, terwijl F_x juist toe neemt.
F_z is de verticale kracht die het lichaam draagt, maar naarmate de afzetvoet verder weg staat, neemt het glijbeen dat over.
F_x is voor ons de belangrijkste kracht. Deze zorgt voor de voorwaartse beweging en komt overeen met V_2 in *figuur 2*. Bedenk dat $F_x = \cos\alpha \cdot F$ en als α kleiner wordt, wordt $\cos\alpha$ groter en wordt dan bijna 1.
Conclusie: Het gevolg van dieper zitten is een kleinere hoek α en dus een grotere kracht F_x.

Toch moeten we ons niet te snel rijk rekenen, want er is nog een ander probleem.
Als we tijdens de afzet het been strekken neemt de snelheid waarmee gestrekt wordt, steeds meer af.

In *figuur 5* staat een schematische weergave van het been. H = heup; K = knie; E = enkel; θ = kniehoek.

Door het been te strekken wordt HE langer en dat geeft de kracht V_2 die zo belangrijk is voor onze voortbeweging.

Gebruiken we in ΔHKE de cosinusregel, dan geldt:

$$HE^2 = HK^2 + KE^2 - 2HK \cdot KE \cdot \cos\theta$$

We differentiëren naar de tijd t die nodig is om het been te strekken; we krijgen dan de snelheid in de volgende formule:

$$2HE\,\frac{dHE}{dt} = 2HK \cdot KE \cdot \sin\theta\,\frac{d\theta}{dt}$$

ofwel:

$$\frac{dHE}{dt} = V_2 = \frac{HK \cdot KE \cdot \sin\theta}{HE} \cdot \frac{d\theta}{dt}$$

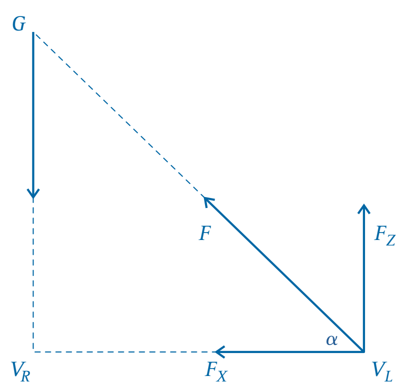
Als de hoek θ naar 180^0 gaat, gaat $\sin\theta$ naar 0, dus V_2 wordt 0.

het gevolg van dieper zitten is een kleinere hoek α

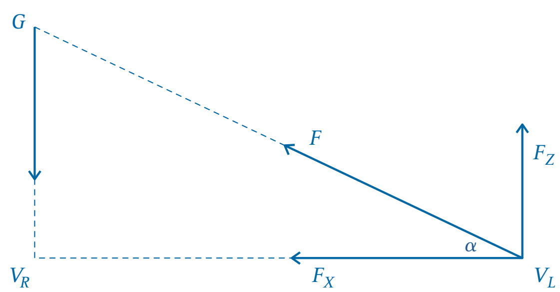
Nog wat theorie over de bochten

Schaatsen in de bocht gaat hetzelfde als op het rechte eind. Er moet ook weer loodrecht op de glijrichting afgezet worden. Er komt alleen 'het pootje over' bij, waardoor telkens van richting veranderd wordt. Met snelle films is geconstateerd dat de glijfase rechtuit is (ook bij goede schaatsers). Wat zal het voordeel van de carve-schaats zijn als V_1 een gebogen lijn wordt?

3



4



Het zal dan moeilijk worden om V_2 loodrecht op V_1 te krijgen. Gaat daarmee het voordeel niet verloren?
Nu nog wat berekeningen om aan te tonen, dat bij een bepaalde rijder, het aantal slagen per bocht vast ligt. Hierbij neem ik aan dat zijn snelheid en kracht vast liggen.
In *figuur 6* geldt:

$$\tan \alpha = \frac{V_2}{V_1}$$

en omdat voor kleine hoeken geldt $\alpha = \tan \alpha$, krijgen we

$$\alpha = \frac{V_2}{V_1}$$

Als n het aantal slagen per bocht is, dan is $n \cdot \alpha = \pi$.

Nu is $n \cdot \dfrac{V_2}{V_1} = \pi$ ofwel: $n = \pi \dfrac{V_1}{V_2}$

Als T de slagtijd is, dan is $f = \dfrac{1}{T}$ de slagfrequentie en geldt dus voor een bocht met straal R: $\pi R = nV_1 \cdot T$ (bedenk dat $V_1 \cdot T$ snelheid maal tijd, dus de lengte van een slag is).
Deze formule wordt: $\pi R = nV_1 / f$.
Met de n van hierboven geeft dit:

$$\pi R = \frac{\pi V_1^{\,2}}{V_2 f}$$

zodat

$$V_2\, f = \frac{V_1^{\,2}}{R}$$

De snelheid V_1 waarmee een schaatser de bocht in gaat, en R liggen vast. Ook de kracht van een schaatser bij een wedstrijd ligt vast op zijn maximum, dus heeft hij geen keuze voor f. Het aantal slagen per bocht ligt dan vast.

Over de schrijver

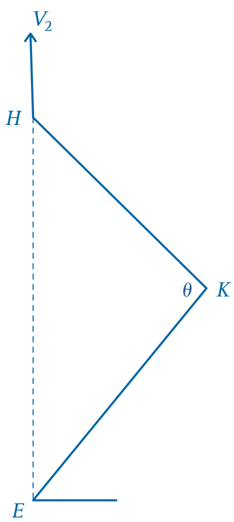
Johan Verhoog is docent wiskunde aan het Christelijk Lyceum te Veenendaal.

Literatuur

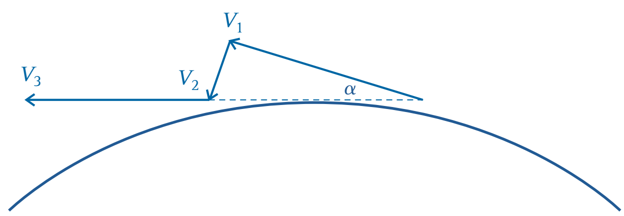
1. Prof. dr. G.J. van Ingen Schenau, Hand-out bij de lezing op de Nationale Wiskunde Dagen

2. Prof. dr. G.J. van Ingen Schenau, Op glad ijs; snelheid en strategie in: Natuur & Techniek nr. 2, 1992

5



6



Vakantiecursus 2000

[Gert de Kleuver]

Is wiskunde nog wel mensenwerk?
Dit thema stond centraal tijdens de Vakantiecursus 2000 die georganiseerd werd door het Amsterdamse Centrum voor Wiskunde en Informatica. Nu kun je met het thema vele kanten op, maar het mensenwerk blijft na de vakantiecursus zeker nodig. De verschillende sprekers maakten ons duidelijk dat wiskundig denkwerk niet zomaar vervangen kan worden door een computer.
Een tweetal lezingen wil ik bespreken [1], om de variatie in onderwerpen te laten zien, maar ook om wiskundedocenten aan te moedigen om volgend jaar ook een vakantiecursus in Eindhoven of Amsterdam mee te maken.

De cursus zelf

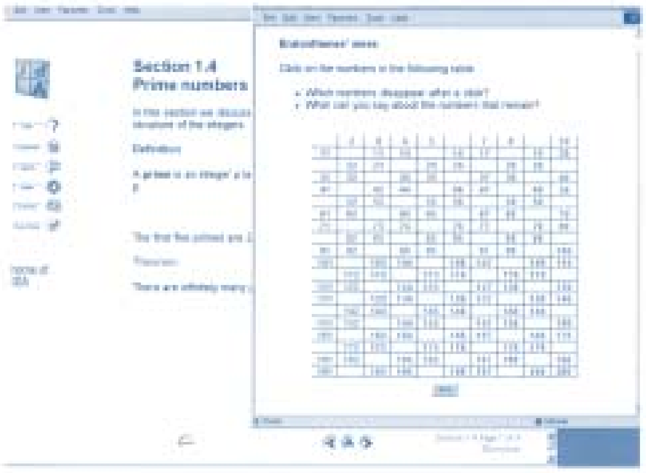
De eerste dag bestond uit vier lezingen, de tweede cursusdag bestond uit drie lezingen en een onderdeel oefeningen [2]. Het laatst genoemde onderdeel sloot aan bij één van de lezingen, men heeft dan de mogelijkheid om enkele opgaven te maken.
Elk onderdeel duurde ongeveer 45 minuten en werd afgewisseld met pauzes en, indien gewenst, een maaltijd. De mogelijkheid om dan kontakten te leggen met verschillende collega's is ook een belangrijk onderdeel van de vakantiecursus.

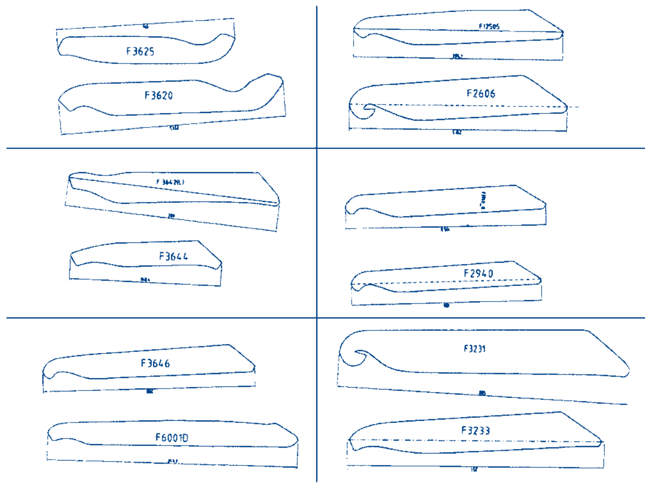
Algebra Interactive!

Dr. H.J.M. Sterk heeft het computerprogramma 'Algebra Interactive!' gedemonstreerd in zijn lezing 'Interactief onderwijs in de algebra'. Het programma is bedoeld voor eerste en tweedejaars studenten van de ingenieursopleidingen aan de Technische Universiteit van Eindhoven.
Algebra is gekozen omdat veel studenten het vak als saai en zeer theoretisch ervaren. Het gebruik van genoemd programma moet dienen om de leerstof aantrekkelijker en levendiger te maken. Wat hij ons liet zien was zeer aantrekkelijk. Je kunt nu de wiskunde meer benaderen vanuit een algoritmische standpunt. In 'Algebra Interactive!' is juist met nadruk gekozen voor dit laatste. In vogelvlucht werden de verschillende mogelijkheden van het programma getoond, als ware het een boek met een inhoudsopgave als startpunt.
De zeef van Eratosthenes werd gedemonstreerd *(zie figuur 1)*. Wie heeft er met zijn of haar klas niet de eerste priemgetallen opgezocht volgens de zeefmethode. In het begin vonden de leerlingen het nog wel aardig, maar meestal verveelde het snel. Gelukkig was het met dit programma zeer snel klaar.
De volgende demonstratie was abstracter van aard, met genoemde algoritmische kant van het programma. De volgende definitie werd op het scherm getoond:

Gegeven zijn de gehele getallen a en $b \neq 0$.
Dan bestaan er unieke gehele getallen q en r zó dat
$a = qb + r$ *en* $0 \leq r < b$.

Hier wordt delen met rest beschreven. Zo kun je de staartdeling 24/2371\98 rest 19 laten uitvoeren. Het leidt tot $2371 = 98 \times 24 + 19$. In de optiek van het programma ligt de nadruk op het algoritmische procédé achter de bepaling van het quotiënt en de rest.
Natuurlijk is een kleine uitbreiding snel te maken en zo





1

2

kun je de ggd van 96 en 39 bepalen.
Algebra Interactive! geeft dan het volgende weer:

$96 = 2{\cdot}39 + 18$
$39 = 2{\cdot}18 + 3$
$18 = 6{\cdot}3 + 0$
$ggd\,(96,39) = 3$

De resultaten na één jaar gebruik zijn bemoedigend want de resultaten van het tentamen waren beter dan voorgaande jaren, en de waardering van de studenten is gestegen.

Industriële wiskunde: Wiskunde werkt!

Volgens Prof. dr. J. Molenaar zijn er een drietal soorten wiskunde te onderscheiden namelijk theoretische wiskunde, toegepaste wiskunde en industriële wiskunde. De laatste soort gaat uit van concrete vragen uit de industrie of andere delen van de maatschappij die een wiskundige oplossing in zich hebben. Om een concreet vraagstuk op te lossen dienen een aantal stadia of fases te worden doorlopen:

- inventariseren
- mathematisch modelleren
- dimensieloos formuleren
- reduceren
- analyseren
- interpreteren
- optimaliseren door itereren
- implementeren

Het proces wordt zo enkele malen doorlopen. Op boeiende wijze hebben de deelnemers van de vakantie-cursus de bovengenoemde stappen mee kunnen maken. De vraag uit het bedrijfsleven was de volgende: ‘Is het mogelijk om het schutblad van een sigaar via een machine te laten uitsnijden en een sigaar automatisch te laten wikkelen.’

Het schutblad zorgt voor de smaak van een sigaar, zoals de kenners wel zullen weten. Van een dikke bolknak tot een klein recht sigaartje zijn de vormen uniek en voor het wikkelen van het schutblad zeer verschillend *(zie figuur 2)*. De verschillende stappen uit bovenstaand schema werden getoond, waar verrassende wiskundige conclusies getrokken werden.
Ik heb me nooit gerealiseerd dat het wikkelen overeenkomt met een beginwaarde probleem handelend over de richting en de hoek die de wikkel met de sigaar maakt. Vaak zijn de eerste ontwikkelde oplossingen in de industrie nog niet goed te gebruiken, vandaar dat het mathematisch modelleren en de andere stappen vaker doorlopen moeten worden.
Gelukkig zijn we in deze niet altijd de sigaar.

Noten

[1] Dit verslag kwam mede tot stand door gebruik te maken van de syllabus, die ook dit jaar weer werd uitgereikt. Daarin hebben onder andere de sprekers dr. H.J.M. Sterk en prof. dr. J. Molenaar een samenvatting van hun lezing geschreven. Beiden hebben voor het gebruik daarvan toestemming gegeven.

[2] De hierboven niet genoemde onderdelen van de cursus waren:
Rekenen aan beelden: is een plaatje duizend woorden waard? (Dr. ir. H.J.A.M. Heijmans)
Wavelets in beeld en geluid (Dr. H.G. ter Morsche)
Een computerwerkplaats voor wiskunde (Drs. A. Heck)
Computers: ook voor de wiskunde zelf (Prof. dr. N.G. de Bruijn)
Elliptische krommen en cryptografie (Dr. M.J. Coster en dr. W.W.J. Hulsbergen)

Nederlandse
Vereniging van
Wiskundeleraren

Jaarrede 2000

[Marian Kollenveld]

Waar blijft de tijd?

Neem het magische jaar 2000. Daar hebben we lang op moeten wachten. Hoe lang is niet bekend. De schattingen variëren van enige miljarden jaren, via 300.000 tot 2000, afhankelijk van of het nulpunt in de bigbang, het begin van menselijk leven op aarde of het begin van de jaartelling gekozen is. En het was zo voorbij, je kon door uitgekiend in vliegtuigen te stappen het magische millenniummoment weliswaar meermalen meemaken, maar toch.
Of neem dit lustrum. De wachttijd daarop is redelijk bekend: 75 jaar heeft het geduurd tot we dit 75-jarig jubileum konden vieren. En nu dus feest.
We hebben het weten op te rekken tot anderhalve dag en ik hoop dat dit ook voor u een feestelijke anderhalve dag is en zal zijn.
Dit is een feestrede, maar we zijn niet van die types die dan met een feestneus op blind hoera gaan roepen. Het feestelijk feit op zich ontslaat ons niet van enige reflectie, bezinning op dat wat achter ons ligt en wat ons nog te wachten staat.

Terugblik

Terugkijkend zie je dat er veel verandert, maar ook verrassend veel niet.
In de eerste Euclides stond dat het 'wenscht te zijn een tribune voor het vrije woord van hen, die in opstand komen tegen maatregelen van "bovenaf" en tegen slappe halfheid.' Die maatregelen van bovenaf mogen zich nog steeds in onze kritische belangstelling verheugen.
De slappe halfheid van toen betrof 'het peil der leerlingen die ons thans worden gezonden.'
Vergeleken met het examen van 3 jaar daarvoor, 'zouden 70% van de nieuw aangekomen leerlingen gladweg onvoldoende hebben gekregen.' Verrassend actueel toch in het licht van de eerste examens voor de Tweede fase.
Maar er is ook veel veranderd. In een tijd dat de samenleving stabiel was, de programma's vastlagen en het leven overzichtelijk was, lees je in het jaarverslag van de Vereniging ter grootte van een half A4'tje hoe vaak het bestuur vergaderde, en dat het soms wel 1 officiële brief per jaar schreef. Uit overlevering weet ik dat het bestuur toen eerst at, en daarna vergaderde.
Er overvalt ons wel eens enige weemoedigheid als we daaraan denken.

Wiskunde

Er is wel iets te zeggen voor de stelling dat elk land de wiskunde krijgt die het verdient. Hoe ordelijker, hoe meer gedisciplineerd een samenleving, hoe harder en strenger de wiskunde. Hoe minder differentiatie ook, iedereen doet in principe hetzelfde.
In onze uiterst pluriforme en totaal niet meer gedisciplineerde samenleving hebben we alleen voor havo/vwo al acht onderscheiden examenprogramma's, met verschillende procenten overlap. En in het mbo zijn meer dan twintig landelijke organen actief die allemaal zelf de eindtermen vaststellen voor de opleidingen binnen de sector waarin ze actief zijn.

Wiskunde op maat

Het beoogde resultaat is wiskunde op maat, zoveel mogelijk toegesneden op de mogelijkheden van de leerling, en zijn/haar behoeften met betrekking tot een vervolgopleiding. Zo is binnen het mbo een grote belangstelling voor probleemgestuurd en projectonderwijs, waarbij bewaking van niveau en inhoud een voortdurend punt van aandacht is. De wiskunde bestrijkt nu het hele palet van heel eenvoudige concrete activiteiten tot subtiel abstract wiskundig redeneren.

Beeld

Is de wiskunde daardoor nu meer of minder zichtbaar geworden?
Vrouwen en Wiskunde heeft jarenlang geijverd voor het erkennen van diverse soorten van alledaags handelen als wiskundige activiteit. Heleen Verhage moest indertijd nog zelf een pannenlap haken om haar verhaal rond te krijgen (de pannenlap was dat niet, wegens te weinig wiskundegebruik tijdens het haken). Nu staan de boeken er vol mee. De wiskunde op school is daardoor nu wel meer een wolkje geworden dan die stevig afgebakende cirkel, die het voor mij -en voor velen met mij- jarenlang was. Die ontwikkeling moet op termijn gevolgen hebben voor het beeld dat mensen van wiskunde hebben.

De Nationale Doorsnee

Maar die termijn wilden we een beetje bekorten en daarom hebben we als groot lustrumproject De Nationale Doorsnee op touw gezet. Van een paar betrekkelijk wilde gedachten is dat uitgegroeid tot een zeer succesvol mega-statistiekproject voor alle leerlingen in de eerste en tweede klas van het voortgezet onderwijs.
De gedachte was simpel: laat de leerlingen wat vragen beantwoorden over zaken die hen interesseren, en laat ze een voorspelling doen over het gemiddelde voor heel Nederland. Die opzet sloeg aan. Zo'n project is nog niet eerder op deze schaal in Nederland voorgekomen. Maar ook de enthousiaste deelname van zoveel toch zeer serieuze instituten oversteeg onze normale amateur-vrijwilliger proporties ruimschoots.
We zijn eigenlijk wat beduusd door het succes van deze onderneming. De massale deelname op de scholen: meer dan 50.000 leerlingen deden mee; en de grote aandacht van de

pers: de tv, en bijna alle regionale en landelijke dagbladen besteedden aandacht aan de uitslag van het project.
Met gymnastiek als populairste vak, maar met wiskunde als verrassende tweede. Daarmee is het vak op een positieve wijze in het nieuws gekomen, en ook de naam van de Vereniging werd vaak genoemd. Dat is goed voor het vak en voor de Vereniging. Het heeft ons heel direct ook een aantal nieuwe leden opgeleverd. En dat laatste is in deze tijden ook van belang.

Toekomstig lerarentekort

De toekomst ziet er wat dat betreft niet goed uit. De verwachte aanwas aan nieuwe docenten is gering, de verwachte uitstroom groot. De Vereniging is van oudsher sterk vertegenwoordigd in havo en vwo. Uit een onderzoek van enkele jaren geleden bleek, dat de grootste groep daarvan toen rond de 47 en nu inmiddels rond de 50 jaar oud zal zijn. Gezien de arbeidsomstandigheden in het onderwijs is te verwachten, dat er over een termijn van een jaar of tien een grote uitstroom zal zijn. Slechts weinigen halen de pensioengerechtigde leeftijd met tot het einde toe een volledige werkweek.
Wie hen moet opvolgen is niet duidelijk.
Het overheidsbeleid van de afgelopen jaren heeft ernstig bijgedragen aan een vrijwel opgedroogde instroom van de opleidingen. Dat merk je het eerst bij vakken zoals het onze, waar de hooggekwalificeerde mensen die wij in het onderwijs vragen, ook eenvoudig elders emplooi kunnen vinden, en vaak onder veel gunstiger omstandigheden.

Zwaluw?

Dit jaar werd met enige vreugde een verhoogde instroom gemeld bij de lerarenopleidingen en de studie wiskunde. Dat is verheugend, maar nog afgewacht moet worden of dit een eenmalige opleving betreft, en of de afgestudeerden straks ook in groten getale voor een baan in het onderwijs zullen kiezen.

Zij-instroom

De Minister en het departement van OCenW verwachten veel soelaas van de zogenaamde zij-instromers. Mensen uit het bedrijfsleven, die alsnog kiezen voor een baan in het onderwijs. In principe staan ook wij daar positief tegenover. Immers, de situatie als van de afgelopen jaren, waarbij het onderwijs een fuik is, waar je niet uitkomt als je eenmaal binnen bent, is uiterst ongezond en weinig bevorderlijk voor het welbevinden van de docent en de kwaliteit van het onderwijs.
En, -niet onbelangrijk- een wat vrijere wisselwerking tussen onderwijs en bedrijfsleven impliceert ook een vergelijkbaar werk en beloningsklimaat. Dat is voor het onderwijs pure winst.
Maar geeft meteen het probleem: die vergelijkbaarheid is er nu nog niet. Het is dan ook niet te verwachten dat veel talentvolle jonge mensen met een exacte opleiding, die inmiddels elders een carrière opbouwen, de lokroep van het onderwijs met zijn hoge werkdruk en gering carrièreperspectief onweerstaanbaar zullen vinden.
En dat komt niet door het werk. De kern van ons werk: het werken aan de ontwikkeling van jonge mensen is interessant, en maatschappelijk heel relevant. Nederland kennisland kan niet zonder goed onderwijs. Maar de omstandigheden: ja, daar schort het nog wat aan.

wiskundeleraar is wel zeker een vak

Aan de andere kant moet men ook niet te makkelijk aanvaarden dat een eenmaal genoten opleiding mensen ook nu geschikt maakt als leraar wiskunde, gezien de nieuwe programma's en de nieuwe didactiek die de afgelopen jaren ontwikkeld zijn. Wiskundeleraar is wel zeker een vak. Ondankbaar misschien soms, in 4-havo of zo, maar wel een vak.
Het is daarom dat we via onze vertegenwoordiger in de Stichting Beroepskwaliteit Leraren (SBL), een stichting die onder andere werkt aan eisen voor kwaliteit van docenten, veel nadruk leggen op het punt van vakinhoudelijke en vakdidactische kwaliteiten van zij-instromers. Iedere ingenieur kon in de crisisjaren op de tram, maar niet iedere ingenieur kan zomaar voor de klas.

Terug naar het heden

Die zij-instromers zijn er nog niet, we moeten het voorlopig nog allemaal zelf doen. En wat staat er zoal op stapel, ik neem u mee op een rondje onderwijs.

Vmbo

In 2003 zijn de eerste examens van het vmbo volgens de nieuwe opzet, met leerwegen en sectoren. Wiskunde is alleen een verplicht vak voor de sectoren techniek en landbouw. Het bestuur is van mening dat daardoor wellicht teveel leerlingen het risico lopen om te snel bij wiskunde af te haken, met name de leerlingen die de sector economie kiezen. Het argument dat wiskunde toch gekozen kan worden spreekt ons niet zo aan, we weten allen hoeveel leerlingen de weg van de minste weerstand kiezen. Door een te snelle afsluiting kan een fuikwerking ontstaan die leerlingen belemmert in hun vervolgmogelijkheden. Scholen hebben de vrijheid om het schoolexamen sectoraal in te kleuren.
Het bestuur is van mening dat verantwoordelijke instanties zich dienen in te spannen om programma's te ontwikkelen die passen bij de leerlingen die een bepaalde sector kiezen. Differentiatie per sector zal een onderwerp van studie dienen te zijn.

Nederlandse
Vereniging van
Wiskundeleraren

Het bestuur zal een en ander aan de beleidsmakers op het ministerie voorleggen.
De invoering van basisvorming en tweede fase heeft ons eens te meer geleerd hoe belangrijk het is, dat docenten volop de gelegenheid krijgen zich voor te bereiden op nieuwe examens, temeer omdat er ook hier een grotere aandacht is voor vaardigheden. Het bestuur verwacht dat de examengids tijdig voorbeeldexamens zal geven, en volgt de ontwikkelingen nauwgezet. Voor de leerwegondersteuning zal nog heel wat werk verzet moeten worden om zichtbaar te maken wat die ondersteuning in de praktijk betekent. Helaas lijken de didactiek en het ontwikkelen van materialen achter te blijven bij de ontwikkelingen. Dit baart ons zorgen.

Mto

Uit het mto komen wat positievere berichten. Hier worden momenteel per regio afspraken gemaakt met betrekking tot de inhoud van het doorstroomprogramma van mto naar hto. Wiskunde en natuurkunde zijn hierbij de kernvakken.
Dit jaar krijgen alle leerlingen te maken met examens die gebaseerd zijn op de vernieuwde programma's. Vanwege de goede ervaringen op de proefscholen vorig jaar worden deze examens met vertrouwen tegemoet gezien.

Hbo

Ook het hbo is in beweging. Op veel plaatsen maakt men in het onderwijs gebruik van computeralgebra. Dat brengt een enorme cultuuromslag met zich mee, waar niet iedereen in het hbo zich van bewust is. De werkgroep hbo heeft in haar beleidsnotitie een aantal aanbevelingen gedaan met betrekking tot de ontwikkelingen in het wiskundeonderwijs. U vindt de notitie op de website. Een van de plannen die ten uitvoer zal worden gebracht, is het opzetten van een expertisecentrum ter ondersteuning van de docenten in het hbo, opdat niet iedereen hetzelfde wiel hoeft uit te vinden. De werkgroep gaat verder met het in kaart brengen van de functie van de wiskunde in het hbo en het mobiliseren van docenten. Die docent moet niet afwachten of en hoe zijn vak wordt gesaneerd, een eufemisme dat we allen kennen, maar zelf initiatieven nemen voor het ontwikkelen van modern onderwijs: gericht op de eindtermen van de opleiding, dus kijkend over de grenzen van het eigen vak, en natuurlijk met gebruikmaking van de moderne middelen van de 21ste eeuw.

Tweede fase

Ook in de Tweede fase komen die middelen van de 21ste eeuw binnen bereik. Zo is er de grafische rekenmachine, die een heroriëntatie op de analyse nodig maakt, en in een wat verder verschiet ligt computeralgebra, wat een heel ander licht kan werpen op de algebraïsche kennis die onze leerlingen nodig hebben. Dat zijn fundamentele veranderingen die een goede doordenking vragen. Het bestuur zal zich komend jaar inspannen om met anderen dit denken mede vorm te geven. We laten ons hierbij leiden door: 'de tegenwoordige stand der wetenschap (...) en de praktijk van het leven', net als in 1938 (zie het Lustrumboek *100 jaar Wiskundeonderwijs*, pag. 129).
We hebben als bestuur grote zorgen over de toegenomen werkdruk voor docenten in de Tweede fase. Deels tijdelijk, dus overkomelijk, deels structureel, dus punt van aandacht. Al bij de eerste presentatie van de plannen hebben we benadrukt, dat voor wiskunde, en dan met name voor wiskunde B, relatief meer contacttijd nodig zou zijn. Die wens is nooit officieel gehonoreerd; scholen hebben die differentiatie tussen vakken niet aangebracht. Omdat de overheid geen regels geeft, -de scholen zijn immers autonoom-, moeten docenten dus op schoolniveau vechten om tijd voor hun onderwijs. Dat geeft grote verschillen: de ene docent heeft nu soms anderhalf keer zoveel tijd als de ander voor hetzelfde vak. Met als direct gevolg dat ook de leerling in de ene school veel meer tijd aan zijn wiskunde kan besteden dan op de andere. Want zonder adequate hulp van de docent kan de leerling ook niet verder en dan wordt studielast een leeg begrip. Wij vinden dit te gek voor woorden: leerlingen komen zo volstrekt verschillend voorbereid op het examen. De verantwoordelijkheid voor goed onderwijs ligt ook bij andere partijen.
We hebben daarom samen met andere vakverenigingen binnen de *β*èta-federatie het initiatief genomen om dit onderwerp breed en zonodig publiekelijk onder de aandacht te brengen middels brieven naar en gesprekken met de Staatssecretaris, de leden van de Vaste Kamercommissie van Onderwijs, de Inspectie en de Vereniging van Schoolleiders. We houden u op de hoogte.

Zebra

Verder gaan we onverdroten door met het doen van leuke dingen: de Zebrareeks is vandaag weer met twee deeltjes uitgebreid. Ze zijn voor een ledenprijs verkrijgbaar bij Epsilon Uitgeverij. U kunt zich, ook voor een ledenprijs, voorzien van een persoonlijk abonnement waarbij u de volgende deeltjes thuisbezorgd krijgt.
Ook voor een ledenprijsje is te koop het boek van professor Aarts over de vlakke meetkunde, dat nieuwe onderwerp in het vwo, eveneens uitgegeven door Epsilon.

Communicatie

U merkt dat er veel verandert, en dan is het belangrijk om op de hoogte te zijn en elkaar te informeren. Dat is één van de functies van de Vereniging. We zijn heel blij met onze eigen 'communicatiekanalen', Euclides en de website. Euclides is zelfs nog van iets respectabeler leeftijd dan de Vereniging, maar dat is haar niet aan te zien. In dit jubileumjaar is er, al dan niet via genetische

manipulatie, een facelift uitgevoerd, waardoor we een fris en vitaal blad houden, met een eigentijdse vorm, en een eigentijdse inhoud. De redactie volgt de actuele ontwikkelingen en informeert en ondersteunt daardoor de docent in de klas. Vandaag zijn ze zelfs gewapend met een digitale camera op pad om verslag te doen van dit congres, in Euclides, en ook op de website, ons andere paradepaardje en zonder twijfel de mooiste en informatiefste wiskunde-site. Hij wordt ook druk bezocht. Het afgelopen jaar waren er 22.000 bezoekers, met in de maand van de examens een piek van 7500. Onze website, het resultaat van de inzet van enkele enthousiaste leden, die de website hebben opgezet en voortdurend onderhouden, heeft daarmee een centrale plek in het Nederlandse wiskundeonderwijs.

Conclusie

En zo is er reden tot zorg en tevredenheid, is er nog voldoende te doen, maar de conclusie is als vanouds dat het wiskundeonderwijs nog springlevend is, en als ik naar u kijk, de Vereniging ook. Er is dus alle reden voor het vieren van ons jubileum.

Ten slotte

Dankzij de grote inzet van velen is er weer een programma dat klinkt als een klok en loopt als een trein. We zijn als bestuur heel trots en dankbaar voor de bereidheid van zoveel leden om zich belangeloos voor de Vereniging in te zetten. Dat toont een betrokkenheid die hartverwarmend is, en ons ook stimuleert. Ik wens u dan ook een leerzaam en genoeglijk lustrumcongres toe.

docenten moeten vechten op schoolniveau

Wisweb

De Vereniging is onder andere ook betrokken bij Wisweb, een breed samenwerkingsproject waarbinnen onderzocht wordt hoe bestaande en nieuwe internet-toepassingen in het onderwijs kunnen worden ingezet, en wat de meerwaarde is. We ondersteunen dit soort projecten van harte, omdat we het van groot belang vinden dat er onderzocht wordt hoe het wiskundeonderwijs er in de toekomst uit kan zien. De samenwerking door alle partijen die betrokken zijn bij het verzorgen, vernieuwen en begeleiden van wiskundeonderwijs geeft een dergelijk project een grote meerwaarde. De som is hierbij meer dan de delen apart.

[Redactie Euclides]

Lustrumcongres

Op vrijdag 17 november en zaterdag 18 november 2000 werd in Utrecht het Lustrumcongres van de Vereniging gehouden. Honderden wiskundedocenten konden zich anderhalve dag lang vermaken met en verdiepen in een breed scala aan activiteiten voor, rond en met wiskunde. We doen hieronder fragmentarisch verslag.

W. Kardux
Hij sprak namens het College van Bestuur van de Universiteit Utrecht vooral zijn zorgen uit over de kwaliteit van het onderwijs als gevolg van bezuinigingen.
De minister was nog niet aanwezig, dus dat had niet direct effect.

Jan de Lange - Wiskunde over de landsgrenzen
Wiskundeonderwijs in mondiaal perspectief
Er zijn op dit moment 150 miljoen kinderen die geen enkele vorm van onderwijs krijgen. Daarnaast zijn er een miljard analfabeten. Ook bestaat voor nog eens miljoenen kinderen het onderwijs uit niet meer dan een enkele leraar en een schoolbord in het veld.

Status van het vak
Er is wereldwijd een tendens zichtbaar dat de legitimiteit en de status van het schoolvak wiskunde aan het afnemen is.
Die afkalving van status treft vooral de landen die vasthouden aan een zeer formeel curriculum en veel minder de landen die een wiskunde voor allen als uitgangspunt voor hun wiskundeonderwijs nemen.
Er gloort hoop aan de horizon. Er is een verhevigde discussie rond gecijferdheid en functionaliteit van wiskunde.

Hoe kun je landen vergelijken?
In de TIMSS-onderzoeken scoort Nederland zeer hoog. Er is echter wel het een en ander aan te merken op de methodologie en de inhoud van de toetsvragen. Overwegend zijn deze nog formeel en multiple choice. Ze meten soms meer de cultuur dan het wiskundeniveau.
In een nieuw project PISA worden ook vergelijkende tests uitgevoerd. Deze zullen meer liggen op het gebied van creativiteit, redeneren en problem solving.
Het is te verwachten dat ook op zo'n test Nederland hoog zal scoren, gezien de ontwikkeling van het wiskundeonderwijs in Nederland.

Wensenlijstje
Nederland doet het betrekkelijk goed, maar er kunnen altijd dingen beter.
- Meer aandacht voor probleem oplossen en redeneren in basisonderwijs.
- Meer terugkoppeling van VO naar PO: er zijn bijvoorbeeld goede mogelijkheden voor een soort aanvankelijke algebra in het basisonderwijs.
- Doorgaande lijn in meetkundeonderwijs van heel jong tot oud.
- Verdieping basisvorming. De huidige basisvorming is een 'a mile wide and an inch deep'.
- Minder toetsapparaat.
- Verdieping wiskunde A.
- Veel meer faciliteiten voor docenten.

En tot slot:
Een gift van 7500 gulden namens het FI voor het Wereldwiskunde Fonds.

2000

Martinus van Hoorn
Aanbieding van het lustrumboek: 100 jaar Wiskundeonderwijs [1].
Er zijn 32 hoofdstukken van even zovele auteurs over zeer uiteenlopende facetten van het wiskundeonderwijs in de afgelopen 100 jaar.
Er is in de 20e eeuw een enorme toename geweest van het aantal leerlingen dat per jaar wiskundeonderwijs krijgt. Nu zijn dat er 900.000, dat is waarschijnlijk meer dan 50 keer zoveel als in 1900.
En ook:
'De maximale verblijfsduur in het vmbo is inhumaan!'

Minister Hermans
Hermans feliciteert de vereniging met het 75-jarig bestaan.
Hij memoreert nog eens dat er net zo'n 400 miljoen gulden extra beschikbaar is gesteld voor gebouw, inventaris en leermiddelen.
Hij geeft als visie dat je scholen de ruimte moet geven om prestaties te leveren. Ruimte om te variëren, ruimte door middel van competentiebeloning en een verbetering van de arbeidsomstandigheden.
Minder regels en meer vrijheid is het motto.
Daar hoort ook bij minder toetsen en meer aandacht voor andere vormen van kwaliteitszorg en kwaliteitsbewaking.

En enkele ministeriële one-liners:
- Docenten worden niet achter de tekentafel in Zoetermeer gemaakt.
- De muren van de school zijn niet meer dan voor het tegenhouden van de regen en de wind.
- Jeder ist Lehrer jedes (naar Bakoenin).
- Mijn schroom is omgeslagen in bewondering.
- Examens richten zich op de gemiddelde leerling en doen geen recht aan de diversiteit onder de leerlingenpopulatie, en dat is jammer.
- Scholen voor voortgezet onderwijs moeten bij het vaststellen van de wiskundeleerstof en de behandeling daarvan niet teveel intern gericht zijn, maar streven naar een afstemming op de vervolgopleidingen.

Jaarrede Marian Kollenveld
Aan het eind van Marians jaarrede [2] wordt Heleen Verhage als één van de drijvende krachten achter het lustrumcongres in het zonnetje gezet.
Zij krijgt een prachtig kunstwerk van Koos Verhoeff, geïnspireerd op de Pythagorasboom van Bosman.
Marian: 'Een boom met als eigenschappen dat haar omtrek oneindig, maar haar oppervlak begrensd is.
Bij Heleen Verhage is dat, in een dimensie meer, net andersom. Haar oppervlak is eindig, maar haar inhoud schier onbegrensd. Met haar daadkracht, creativiteit en organisatievermogen is ze schuldig aan een groot deel van het succes van onze lustrumactiviteiten. We willen haar daarom graag als blijk van onze grenzeloze waardering een boompje geven.'

Loesje
Bij ruimtefiguren zie ik altijd sterretjes
Mijn verhoudingen eindigen altijd in een breuk
Multicultureel: Integreer van nul tot oneindig

Govert Schilling - Wiskunde is wèl leuk
Waarom is astronomie zo veel populairder onder het grote publiek dan wiskunde?
Je kunt altijd zelf wat zien bij sterrenkunde.
Er zijn ontzettend veel mooie plaatjes. Er worden honderden miljoenen besteed aan popularisering van het vak. Er is een traditie onder astronomen om veel praatjes, lezingen en clubs te doen.

Veel van deze mogelijkheden liggen er bij wiskunde ook. Waarschijnlijk zullen de bedragen voor popularisering wel lager liggen, maar een aantal samenwerkende universiteiten zouden best daarvoor mensen kunnen inzetten.
Wiskunde spreekt overigens ook nu al bij het grote publiek veel meer tot de verbeelding dan wij misschien soms denken.
Er verschijnen jaarlijks talloze boeken en artikelen over wiskunde of waarin wiskunde een belangrijke rol speelt.
Wat zijn de mogelijkheden om het vak wiskunde nog beter onder de aandacht te brengen?
Het besef dat wiskunde een belangrijke rol speelt in de maatschappij en de wereld om ons heen moet veel meer





doordringen in de publieke opinie.
Zo weten ook politici en beleidsmedewerkers daar veel te weinig van.
Er moet nog meer wiskunde in de populaire pers komen.
Er is behoefte aan sterke mediagenieke wiskundigen die goedgebekt hun vak kunnen uitdragen.
Leerlingen moeten nog veel meer geënthousiasmeerd worden. Leerlingen vinden vooral ook puzzeltjes erg leuk, maar ook meer filosofische vragen op hun niveau: wat is oneindig, wat zijn grote aantallen, et cetera.

Ed de Moor
In een reactie op enkele woorden van minister Hermans: 'Ik ben het *niet* met u eens.'

Jos Tolboom
In een reactie op enkele woorden van minister Hermans: 'Levenlang leren begint bij de docent.'

Peter Kop
In een reactie op enkele woorden van minister Hermans: 'Ik heb geen tijd.'

Marjolein Kool
Over de aanwezigen bij haar workshop: 'Alle bèta's zitten binnen, alle alfa's staan buiten.'
En ook: 'Kijk rond, we zijn net echte mensen.'
Over leerlingen: 'Je moet ze pakken of je bent ze kwijt.'

Ed de Moor - Euclides' moeilijkste eeuw
'Euclides heeft ons bij de ontwikkeling van de didactiek van de meetkunde in de weg gestaan.'
'Al is de matrix nog zo klein, zijn eigenwaarde mag er zijn.'
En aan het eind van zijn lezing: 'Leve de meetkunde!'

Hans van Lint
Over het wiskundeonderwijs in een van onze buurlanden: 'Het is ouderwets, maar uiterst degelijk.'

Swier Garst
'Ik eet voor, tijdens en na de bestuursvergadering. Ik heb namelijk het oude en het nieuwe bestuur gekend.'
En ook: 'Ik ben modern dyslectisch.'

Jo Vaessens
Tijdens zijn betoog over meetkunde: 'Je kan op Internet zien dat Thales dat kon.'

Peter Boon
(Grafisch programmeren met Java)
'Essentieel onderdeel is de interactie met het computerprogramma: je moet kunnen ingrijpen.'

Martinus Riemersma
(Java-applets in wiskundeteksten)
'Je hoeft niets te kunnen, alleen maar typen; je hoeft niets te kunnen, alleen maar typen; enzovoorts.'

Marianne Lambriex
Achter de microfoon na Marian Kollenveld: 'Ik heb geen opstapje nodig.'

Jaap Bakker
Bij de aanbieding van de eerste exemlaren van het boek Wis- en natuurlyriek aan Marjolein Kool en Drs P.:
'Met stijgende verrukking lees ik rijmen over middelloodlijnen, Fibonacci-reeksen of magische vierkanten, en ik smelt zowat bij het lezen van een regel als "Er hing een levensecht portretje van een cirkel aan de muur".'
'Wiskunde en lichte poëzie hebben gemeen dat ze geen enkel practisch nut hebben. Je kunt er alleen maar van genieten als je een soort kinderlijke speelsheid weet te behouden.'
Naar aanleiding van het ontbreken van berijmde levensbeschrijvingen van Nederlandse Nobelprijswinnaars:
'Het moet toch een uitdaging zijn om een nieuwe inhoud te geven aan het begrip "Zeemanslied".'





Jaarvergadering

Bijgewoond door een tiental leden.
Décharge van de penningmeester, en ook op het beleid van het bestuur was niets aan te merken.
Bloemen en woorden van dank voor het afscheid nemende bestuurslid Agneta Aukema en een welkomsapplaus voor het nieuwe bestuurslid Lia de Schutter (zie foto hierboven).

Een congresganger, Hans Daale

Het is lastig in te schatten wat de gemiddelde deelnemer meemaakt op een reünie. Het is vaak afhankelijk van de verwachtingen en de wijze waarop anderen zich voorbereiden en geneigd zijn het 'terugblikgehalte' op te krikken. Bij het lustrumcongres van onze vereniging had ik het idee dat iedereen daartoe wel bereid was. Aangezien ik in de afgelopen jaren zorgvuldig bijzondere activiteiten had laten samenvallen met de jaarvergaderingen en daaromheen gevlochte zaken, was het een aardig feest der herkenning.
Het leukste was na ruim dertig jaar weer rond te lopen in het langste gebouw van de wereld; tenminste, dat gevoel heb ik overgehouden aan mijn studietijd in het Transitorium I, toen er nog maar drie gebouwen stonden in de Uithof. Het was ook de tijd van Freudenthal, Van der Blij en Van Dormolen; beide laatsten waren ook op het lustrumcongres aanwezig. Mijn laatste studiejaar viel samen het eerste werkjaar van Van Dormolen aan de Utrechtse universiteit. Collega's van een fors aantal jaren geleden, nog altijd bezig hun vak uit te oefenen; ik kon ze weer ontmoeten en met ze bijpraten. Dan lijkt het of er niet zoveel is veranderd - al denk je dat steeds wel - maar je hebt nog steeds het idee dat je wiskunde een leuk vak vindt om aan leerlingen (en studenten in mijn geval) over te dragen.

De workshops bijgewoond door Hans Daale

Vlaamse wiskunde op de werkvloer - Men heeft in Vlaanderen een lespakket ontwikkeld rond de meest eenvoudige begrippen van de statistiek. Bij veel productiebedrijven werken arbeiders aan de lopende band, verrichten veelal voortdurende dezelfde handelingen in het productieproces. De machines zijn op een bepaalde manier afgesteld en dan is er altijd een proces noodzakelijk om de kwaliteit te kunnen handhaven. Zo moeten bij Duracell, een van de deelnemende fabrieken aan het statistiekproject, bepaalde cilindervormige onderdelen van de batterijen binnen een zekere marge blijven. Via steekproeven worden van een aantal onderdelen het maximum, minimum, range en gemiddelde bepaald en in grafieken ondergebracht. Door de arbeiders in een cursus van 10 weken van 4 uren (deels in vrije tijd!) te leren wat de betekenis is van hetgeen ze aan getallen produceren, worden ze deelgenoot gemaakt van het kwaliteitszorgsysteem en leren ze te herkennen wanneer een machine dient te worden bijgesteld en, statistisch gezien, waarom dat is.
Het fascinerende hieraan is dat het simpele werk op een hoger niveau wordt gebracht door het te koppelen aan de wijze waarop onderliggende processen in de gaten kunnen worden gehouden. De arbeiders gaan preventief meedenken met de lijnchefs. Een bijzonder project, met simpele technieken, maar leidend tot een grote betrokkenheid, zo bleek uit dit verhaal van de Vlaamse Bea van den Langendonck.

Vmbo-integratie: theorie en praktijk - Deze workshop had te maken met het wiskundeonderwijs aan een vmbo-school en dan specifiek in hetgeen ze vroeger een ambachtsschool noemden, in Amsterdam. Het gaat om leerlingen die bouwtekeningen voor het maken van metalen of houten onderdelen moeten kunnen begrijpen. Daarbij wordt een object beschreven via tekeningen van het voor- en achteraanzicht en diverse




zij-aanzichten. Het was vooral boeiend om Mieke Abels, werkzaam bij het Freudenthal-instituut, te horen over de hobbelige ontdekkingstocht naar een goede didactische wijze om de voornamelijk allochtone leerlingen het ruimtelijke inzicht eigen te laten maken. Dat gebeurt in eerste instantie met heel gewone, gekleurde kubusjes waarmee de leerlingen daadwerkelijk moeten stoeien en stapelen, Ze moeten daarbij ook gewoon door de knieën gaan om op ooghoogte tegen het zelf gefabriceerde bouwwerkje aan te kijken. Toch heeft ook hier de computer zijn intrede gedaan en kunnen de leerlingen met een speciaal programma de objecten laten draaien. Dat lijkt simpel en handig, maar toch blijken de leerlingen tegen ruimtelijke problemen aan te lopen waarvan veel oudere docenten die de stereometrie nog uitgebreid hebben ondergaan, geen weet hebben.
Zo'n ontdekkingstocht in het klaslokaal, zo vertelde de inleidster, toont aan dat we in het vmbo nog veel leerlingen tekort doen: 'Geef ze de ruimte om zich te verwonderen over de leuke kanten van de wiskunde, in combinatie met de praktijkvakken'. Want dat gebeurt nu op de betreffende school, waarbij de docenten voor theorie en praktijk niet meer strikt gescheiden hun kennis over het voetlicht proberen te tillen, maar gezamenlijk optrekken. Niet alleen figuurlijk, maar ook letterlijk in elkaars lokalen.

Hoog/meerbegaafden, wat bieden we die? - In de derde workshop heb ik mijn wiskundige jargon kunnen verrijken met de begrippen 'compacten' en 'verrijken', ingebed in een programma voor leerlingen die meer dan gemiddeld presteren. Daarbij hoeft niet per se te worden gedacht aan hoogbegaafde leerlingen, maar wel aan jongeren die vanaf de brugklas bereid en in staat zijn om sneller door de stof te gaan en dus meer aankunnen. Want dat is 'compacten'. Dat kan bijvoorbeeld, zoals de inleiders van de stichting Perdix uitlegden, door deze 'meerbegaafden' te laten beginnen met de samenvatting van een hoofdstuk en aan de slag te laten gaan met de opgaven die daarbij horen. Pas als iets niet duidelijk is, grijpen ze terug op de voorafgaande lesstof. Dat levert in veel gevallen bij deze groep leerlingen een hoeveelheid tijdswinst op die meer dan de helft van de beschikbare uren betreft. En dan kan het 'verrijken' beginnen. Dat betekent niet extra stof of verdiepingsstof, maar meer aanvullende onderwerpen zodat alle leerlingen toch gezamenlijk opgaan en alle hoofdstukken in dezelfde tijd doen.
Belangrijk is dat 'de school' achter het idee van deze methode staat en men niet meteen begint te roepen dat het fout is om iets meer te doen voor de betere leerling en dat toch alle energie in de zwakkeren moet worden gestoken. Je moet in ieder geval als docent wiskunde uit het idealistische hout gesneden zijn om zowel die zwakkeren (want dat is sowieso je taak) als die meerbegaafden van dienst te zijn. Er gaat veel tijd in zitten, zeker in het maken van geschikt materiaal. Samenwerking met collega's, al is het maar met die van andere vakken, lijkt dus een voorwaarde voor succes.

Fotografie
Ron Lambriex

Noten
[1] Zie p.172 voor de toespraak van Martinus van Hoorn.

[2] Zie p.162 voor de jaarrede van Marian Kollenveld.

Oom Petros en het vermoeden van Goldbach

Auteur: Apostolos Doxiadis
Nederlandse vertaling: Peter Oud
Uitgeverij de Bezige Bij, Amsterdam; isbn 90 234 3953 8
Prijs f 39,90

Het jonge neefje van Oom Petros komt te weten dat de laatste een beroemd wiskundige was die zich gestort heeft op een van de hardnekkigste problemen uit de geschiedenis van de wiskunde. Het neefje, de ik-figuur, trekt de beerput van de gestrande carrière weer open en voor een laatste keer betreedt Petros het mystieke rijk van de zuivere wiskunde.

De rekenmeester

Auteur: Dieter Jörgensen
Nederlandse vertaling: Marjo Frings-Latour
Uitgeverij BZZTôH, Den Haag; isbn 90 5501 722 1
Prijs f 39,50

Niccolo Tartaglia, we schrijven 1534, besluit een standaardwerk over de rekenkunde te schrijven en dat aan te bieden aan de hertog van Urbino ten einde bij deze in de gunst te komen. Niccolo slaagt erin enkele belangrijke wiskundeproblemen te ontrafelen en realiseert zich dat hij baanbrekende ontdekkingen doet. Maar kan hij ook voorkomen, dat zijn levenswerk voor verkeerde doeleinden wordt gebruikt? En stroken zijn uitvindingen wel met de waarheid zoals de Inquisitie die ziet?

Meetkunde, facetten van de planimetrie en de stereometrie

Auteur: J.M. Aarts
Epsilon Uitgaven, Utrecht; isbn 90 5041 060 X
Prijs f 52,50 (voor leden van de NVvW op bijeenkomsten f 40,00)

Het boek geeft een toegankelijke presentatie van de meest voorkomen begrippen van de vlakke meetkunde en de elementaire ruimtemeetkunde. Een aantal hoofdstukken kunnen onafhankelijk van elkaar worden gelezen. Er is veel ruimte gegeven aan bewijzen, maar het is ondoenlijk om alles te bewijzen, althans in het bestek van het boek. Ruim twee honderd opgaven en aanwijzingen nodigen uit om mee te denken over de stof.
Wat de studie van de meetkunde zo boeiend maakt is het gevoel van verwondering dat je telkens overkomt; het gevoel van: wat zit de wereld van de wiskunde toch mooi in elkaar.

Zebra 7: De Laatste Stelling van Fermat

Auteur: Peter Lanser, docent wiskunde aan de Werkplaats Kindergemeenschap in Bilthoven
Epsilon Uitgaven, Utrecht; isbn 90 5041 065 0
Prijs f 16,75 (voor leden van de NVvW f 12,50); abonnement is mogelijk (zie hiervoor de Service pagina).

Dit deel van de Zebra-reeks gaat over de beroemdste stelling uit de wiskunde: de Laatste Stelling van Fermat. In 1637 schreef de Franse wiskundige Pierre de Fermat in de marge van een Grieks wiskundeboek: ‘De vergelijking $x^n + y^n = z^n$, *met* x, y, z *en* n positieve gehele getallen, heeft geen oplossing als $n > 2$. Ik heb hiervoor een waarlijk spectaculair bewijs, maar helaas is deze kantlijn te smal om het te bevatten’. Honderden jaren hebben wiskundigen geprobeerd deze stelling te bewijzen. Alle pogingen bleven tevergeefs tot in 1993 Andrew Wiles de (wiskunde)wereld verbijsterde met de mededeling dat hij het probleem had opgelost. Hij had het bewijs gevonden! In dit boekje wordt de geschiedenis van deze stelling behandeld, beginnend bij Pythagoras en eindigend met de oplossing.

Zebra 8: Verkiezingen, een web van paradoxen

Auteurs: H. de Swart, A. van Deemen, E. van der Hout, P. Kop
Epsilon Uitgaven, Utrecht; isbn 90 5041 064 2
Prijs f 16,75 (voor leden van de NVvW f 12,50); abonnement is mogelijk (zie hiervoor de Service pagina)

In deze Zebra kijken we naar manieren om verkiezingen te organiseren. Dat zijn er meer dan je misschien zou denken! Elk kiesmechanisme blijkt behept met vreemde paradoxen. Zo kan het gebeuren dat meer stemmen op een partij er juist toe leidt dat die partij minder zetels krijgt. Ook is het in sommige kiesmechanismen mogelijk dat een meerderheid van de kiezers kandidaat A prefereert boven B, maar dat B toch wordt verkozen. Verkiezingsystemen in verschillende landen worden onder de loep genomen, en er wordt ingegaan op de vraag of er eigenlijk wel een ‘goed’ kiesmechanisme bestaat.
Personalia:
De auteurs zijn Harrie de Swart, hoogleraar Logica en Taalanalyse aan de KUB, Ad van Deemen, universitair docent Politicologie aan de KUN, Eliora van der Hout, onderzoeker aan de KUB en Peter Kop, docent wiskunde aan de GSG in Gouda. De eerste drie auteurs zijn leden van het interuniversitair samenwerkingsinstituut Sociale Keuze Theorie.

Wis- en natuurlyriek

Auteurs: Drs. P & Marjolein Kool
Nijgh & Van Ditmar, Amsterdam; isbn 90 388 1401 1
Prijs f 29,90

Exacte vakken en poëzie zijn wel degelijk met elkaar te verenigen. ‘Wis- en natuurlyriek’ levert het bewijs. De buis van Torricelli en de stelling van Pythagoras verpakt in vrolijke verzen, zullen alfa’s en bèta’s verrukken en tot elkaar brengen. Zo zal de kloof die eeuwenlang tussen beiden bestond eindelijk gedicht worden.

Ons boek, ons onderwijs

[M.C. van Hoorn]

Hieronder volgt, integraal, de toespraak van Martinus van Hoorn ter gelegenheid van de aanbieding van het eerste exemplaar van het Jubileumboek, Honderd jaar Wiskundeonderwijs, aan onderwijsminister Hermans op de eerste dag van het Lustrumcongres.

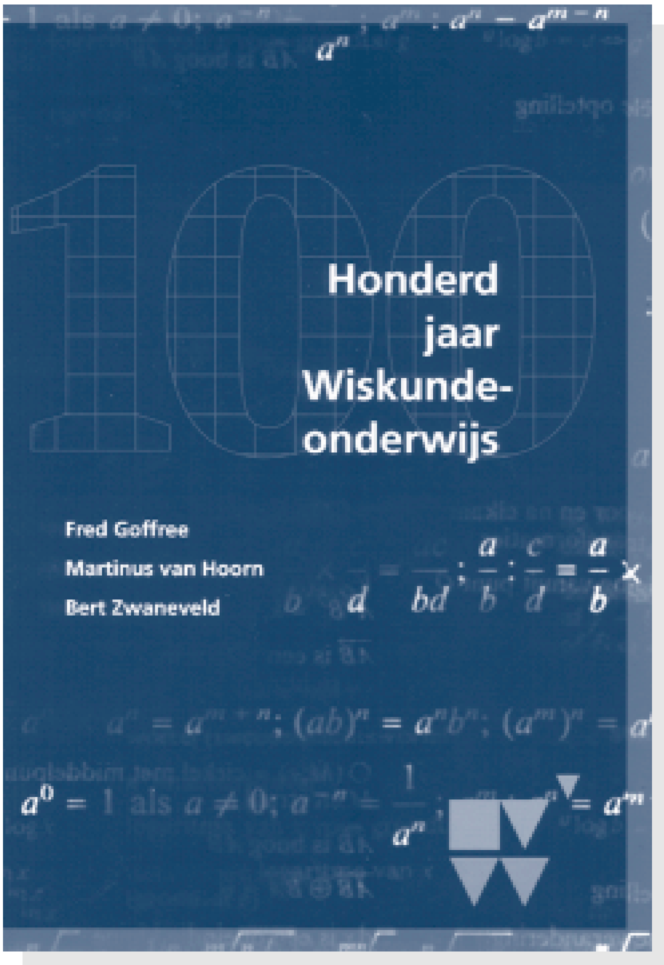
Mevrouw de voorzitter, mijnheer de minister, dames en heren!

U bent er, mijnheer de minister, het boek is er, en daardoor kunt u het boek straks in ontvangst nemen. *Het* boek, dat wil zeggen, eigenlijk is het *ons* boek. Ik ga daar nu iets over vertellen.

U wilt ons boek natuurlijk lezen, naast al het andere dat u wilt lezen. Maar, *moet* u ons boek ook lezen? Het is aan u om dat uit te maken. Men kan ons boek trouwens niet in één keer lezen. Er zijn 32 hoofdstukken, die vrijwel alle los van elkaar kunnen worden gelezen. En dat niet alleen, er zit blijkbaar weinig lijn in ons boek, als je ook nog constateert dat er tegenstrijdige meningen in voorkomen. Ons boek heet 'Honderd jaar Wiskundeonderwijs', en daar gaat het over.
Juist die verschillen in opvatting frapperen. Nu zou je zeggen - wie had daar nu op gerekend - wiskunde is toch zo'n vak van feiten en waarheden; hoe kun je daar dan verschillende opvattingen over hebben? Welnu, ons boek gaat over het wiskunde*onderwijs*, en over onderwijs kun je beslist verschillende opvattingen hebben, dat weet u. Als toegift krijgt u er dus verschillende opvattingen over de wiskunde bij. Tegelijk is ons boek weliswaar geen geschiedenisboek, maar wel een boek met geschiedenissen, waarin al gauw eigen interpretaties van de auteurs zitten.

Er is nog een gemeenschappelijk trekje van alle hoofdstukken, en dat is, dat ze met enthousiasme zijn geschreven, én in de wetenschap dat de hoofdstukken in één band zouden worden gevat. In datt opzicht is het boek nog het meest *ons* boek. De auteurs waren eensgezind in hun idee: dit boek *moet* er komen. Zo hebben vele aspecten van het wiskundeonderwijs er hun plaats in gekregen: de leraren, de leerboeken, de lerarenopleidingen, de verenigingen, de leerplannen, de examens, de leerstof, de ..., vult u maar in. En, er is een hoofdstuk van Struik, heel bekend; hij is de vorige maand overleden. Dat, het hoofdstuk van Struik, kwam zo. Een boek over vijfenzeventig jaar wiskunde-onderwijs, dat vonden we te weinig. Zo kwamen we op honderd jaar. Maar hoe vind je dan iemand die nog uit eigen ervaring kan vertellen over het onderwijs aan het begin van de twintigste eeuw?
Zo kwamen we bij Struik.
Niet alles staat in ons boek. Ons boek is vooral zo geschreven, dat we menen te mogen hopen dat datgene wat erin staat, voor veel meer mensen dan alleen wiskundigen leesbaar is. Of althans, niet helemaal onleesbaar.

Ik kan het niet laten; ik wil een klein stukje citeren uit ons boek. Het is een uitspraak van wijlen professor Hans Freudenthal, indertijd hoogleraar te Utrecht en directeur van het IOWO, het instituut voor de



ontwikkeling van het wiskundeonderwijs, dat in 1980 door één van uw ambtsvoorgangers werd opgeheven; niemand weet waarom. Nu de uitspraak van Freudenthal. Hij zei: ‘Wat de overheid voor het onderwijs beslist, is op korte termijn volkomen onbelangrijk. Want dat onderwijs ontwikkelt zichzelf.’

Als ik mij niet vergis, mijnheer de minister, bent u het hiermee eens. U bent bezig met langetermijnprocessen. Uw maatregelen moeten op lange termijn effect sorteren. U bespeurt, zo nu en dan, enig ongeduld. Maar langetermijnprocessen zijn minstens zo interessant als momentopnamen. Ons boek geeft beide. Ik noem een heel belangwekkend langetermijnproces en ik knoop daar ook nog een hartenkreet van mij persoonlijk aan vast. Zo ben ik dan ook wel weer; schoolmeester blijf je altijd. Maar nu het langetermijnproces dat ik wilde noemen. Dat is de enorme toename, door de gehele twintigste eeuw heen, van het aantal leerlingen in het voortgezet onderwijs. Rond 1900 ging het nog om hoogstens enkele tienduizenden, ik weet het niet eens precies. Rond 2000 zaten er 900.000 leerlingen in het voortgezet onderwijs, misschien wel 50 keer zoveel als honderd jaar eerder. Dat is een enorme verworvenheid, dat we zoveel jongeren les mogen geven. Wiskunde krijgen ze allemaal, dat hebben ze nodig, zoals bekend. Of dat trouwens waar is, weet ik niet. Ons boek geeft daar ook geen uitsluitsel over.

Nu mijn hartenkreet, mijnheer de minister! Herstelt u alstublieft de pedagogische factor in ere, ten bate van al deze leerlingen. Weg met ingewikkelde regelingen die de leerling negeren, en helemaal weg met regelingen die de leerling belemmeren. De ergste regeling is, volgens mij dan, een regeling die van meet af aan kinderen zal duperen; namelijk de maximum verblijfsduur in het vmbo. Deze regeling stimuleert tot lage prestaties, en is dus super-onpedagogisch. Volgens mij is deze regeling inhumaan. Vorig jaar heeft wethouder Van der Aa van Amsterdam dit ook al gezegd. Maar de maximum verblijfsduur is nog niet afgeschaft.

Ik hoop dat het wiskundeonderwijs een steentje kan bijdragen aan de zo noodzakelijke stimulans voor al onze honderdduizenden leerlingen!

De Nationale een uniek

[Peter van Wijk]

In het jaar 2000 bestond de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren (NVvW) 75 jaar. Tevens was het jaar 2000 door de UNESCO uitgeroepen tot Wereld Wiskunde Jaar. Deze twee gebeurtenissen vormden voor de NVvW de aanleiding tot het organiseren van het project De Nationale Doorsnee. Doel van De Nationale Doorsnee was om statistiek op een leuke manier onder de aandacht te brengen van de leerlingen in het voortgezet onderwijs.

In de vorm van een enquête hebben leerlingen uit de klassen 1 en 2 vragen beantwoord over lichaamslengte, ontbijtgewoonte, tijdsbesteding aan sport, televisie en computer, leukste schoolvak, inkomsten uit zakgeld en baantjes en hun favoriete popartiesten.
Het bijzondere van het project was dat de verzameling van een grote hoeveelheid gegevens, de verwerking ervan en de presentatie van de uitkomsten binnen 24 uur werden afgehandeld. Daarmee was het een uniek project. Aan het project was ook een wedstrijdelement toegevoegd. Iedere deelnemende klas kon een voorspelling doen van hoe in hun ogen de 'de gemiddelde leerling' er zou uit moeten zien. Er waren prijzen voor de klassen die de beste voorspelling deden. Op dinsdag 10 oktober j.l. werden de uitkomsten bekend gemaakt door staatssecretaris Karin Adelmund. Uiteindelijk zijn de gegevens van meer dan 50.000 leerlingen verwerkt.

1

De gemiddelde leerling - klas 1		
	Jongens	Meisjes
Lengte	161 cm	161 cm
Ontbijt	brood	brood
Sport	5,1 uur	3,6 uur
TV	14,2 uur	12,2 uur
Computer	8,7 uur	3,3 uur
Vak	lich. opvoeding	lich. opvoeding
Zakgeld	*f* 9,70	*f* 8,50
Werk	*f* 7,80	*f* 3,40
Artiest	andere artiest	andere artiest

2

De gemiddelde leerling - klas 1		
	Jongens	Meisjes
Lengte	168 cm	165 cm
Ontbijt	brood	brood
Sport	5,5 uur	3,6 uur
TV	16,9 uur	14,2 uur
Computer	9,5 uur	4,1 uur
Vak	lich. opvoeding	lich. opvoeding
Zakgeld	*f* 15,80	*f* 11,60
Werk	*f* 24,40	*f* 12,10
Artiest	andere artiest	andere artiest

Doorsnee: statistiekproject

De beschikbare gegevens

Naar schatting zijn er in klassen 1 en 2 ongeveer 400.000 leerlingen verdeeld over ruim 1200 scholen. Al deze scholen hebben een uitnodiging gehad om aan het project deel te nemen. Uiteindelijk hebben 242 scholen daadwerkelijk meegewerkt. In totaal hebben 2302 klassen meegedaan aan het onderzoek, en daarin zaten 50.071 leerlingen. Uitgaande van een totaal van 400.000 leerlingen heeft dus 1 op de 8 leerlingen meegedaan.

De uitkomsten

De tabellen geven een overzicht van leerjaar 1 (zie tabel 1) en leerjaar 2 (zie tabel 2) verdeeld naar jongens en meisjes.

Opvallend maar niet verwonderlijk is dat jongens meer dan tweemaal zoveel tijd achter de computer doorbrengen dan meisjes. Verder is de muziekvraag opvallend vaak beantwoord met 'andere artiest'.

Kennelijk is de 'popscene' een vluchtig gebeuren. De actualiteit van de dag speelt een grote rol in de voorkeur van de leerlingen. De wat meer gevestigde artiesten worden daardoor minder interessant gevonden. Blijkbaar is de vraag in de vorm zoals hij gesteld is in de enquête, niet de juiste manier om de artiestenvoorkeur van de leerlingen te meten.
Bij de vraag naar het leukste vak op school blijkt overduidelijk dat lichamelijke opvoeding verreweg het leukste vak op school wordt gevonden *(zie tabel 3).*

Wiskunde scoort goed in de eerste klas. Bij de jongens komt dit vak op de tweede plaats en bij de meisjes op de derde plaats. Maar in de tweede klas daalt de populariteit van wiskunde snel. Bij meisjes verdwijnt het vak zelfs met 4,7% uit de top 5.

Als je de frequentieverdeling van de lengte van meisjes bekijkt in klas 1 *(zie figuur 4)*, valt op dat er heel globaal gemeten is, vooral de getallen 150, 155, 160, 165 en 170 komen erg veel voor.

3

Het favoriete vak, naar geslacht en leerjaar		
	Jongens	
Klas 1	1 Lichamelijke opvoeding	28,9%
	2 Wiskunde	13,9%
	3 Techniek	13,0%
	4 Informatiekunde	10,1%
	5 Ander vak	5,0%
Klas 2	1 Lichamelijke opvoeding	41,2%
	2 Wiskunde	10,2%
	3 Techniek	5,9%
	4 Informatiekunde	5,3%
	5 Ander vak	5,3%

Het favoriete vak, naar geslacht en leerjaar		
	Meisjes	
Klas 1	1 Lichamelijke opvoeding	18,2%
	2 Muziek	12,0%
	3 Wiskunde	11,6%
	4 Ander vak	7,5%
	5 Informatiekunde	6,8%
Klas 2	1 Lichamelijke opvoeding	25,7%
	2 Muziek	8,8%
	3 Beeldende vorming	8,3%
	4 Verzorging	7,5%
	5 Ander vak	6,8%

Conclusies en winnaars

Gezien de vele positieve reacties is het zeer de moeite waard geweest zo'n grootschalig project van de grond te krijgen. Daarnaast zijn er heel veel data beschikbaar gekomen. Op dit moment wordt er hard aan gewerkt om een vorm te vinden de data op een goede manier beschikbaar te krijgen voor het statistiekonderwijs, voor docenten en voor praktische opdrachten.
Via de website *http://www.nationaledoorsnee.nl* kun je op de hoogte blijven van de laatste ontwikkelingen op dit gebied.

De klassen die de beste voorspelling deden en een reisje naar Duinrell gewonnen hebben:
Klas 1C2, Herbert Visser College, Nieuw Vennep
Klas 1P, Helen Parkhurst College, Almere
Klas M2B, Marnixcollege, Ede Gelderland
Klas 2B, St. Laurens College, Rotterdam.

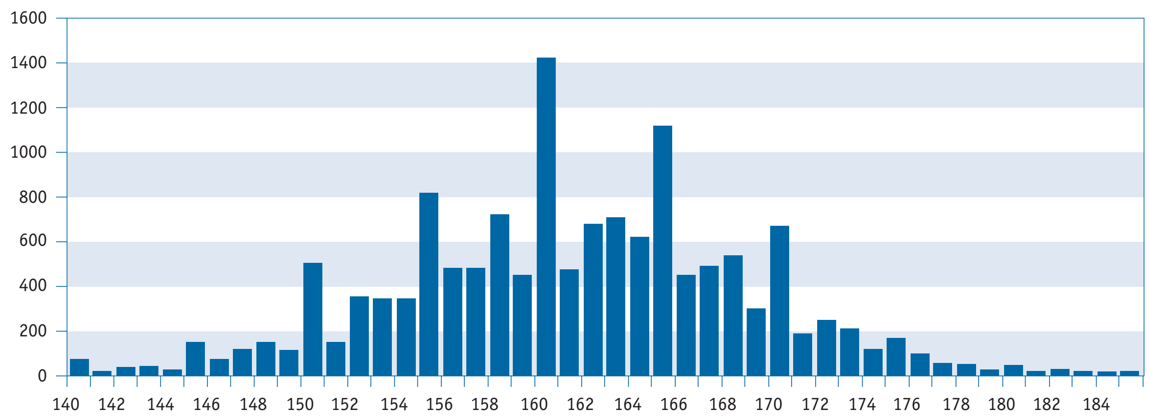
Tot slot

Reactie van een leerling via de DND-website:
Ik vind het een geinig onderzoek. Ik heb er zelf ook aan meegedaan. Ik zit met alles onder het gemiddelde, behalve met computeren, daar zit ik (ver) boven. Trouwens met dat zakgeld, is daar ook het kleedgeld bijgeteld? Ik krijg namelijk (maar) 5,- zonder kleedgeld. Kleedgeld krijg ik trouwens helemaal niet. Kun je ook het gemiddelde van een stad zien? En het gemiddelde van het vwo, havo en mavo, enzo? Ik snap niet dat iedereen l.o. zo leuk vindt. Maar ja, zij hebben dan ook geen les van ....

Bronnen

- *De Nationale Doorsnee, Analyse van de uitkomsten door Jelke Bethlehem, CBS*
- *Lezing door Jelke Bethlehem en Heleen Verhage op het NVvW-lustrumcongres 2000*
- *Website van De Nationale Doorsnee: http://www.nationaledoorsnee.nl*

4



Aankondiging

HKRWO-symposium 2001

Symposium VII van de Historische Kring
Reken- en Wiskunde Onderwijs

Thema:
Akten en Bevoegdheden
Het ontstaan van het beroep van reken- en wiskundeleraar in Nederland (1800-2000)

Datum, plaats en tijd:
26 mei 2001, Hogeschool Domstad te Utrecht (Koningsbergerstraat 9), 10.15 - 16.00 uur

Lezingen:
Fred Goffree
- Het vak rekenen in de opleiding aan de kweekscholen, normaalscholen en PA's (1800-2000)

Klaske Blom
- De opleiding tot wiskundeleraar in het Voortgezet Onderwijs (1863-1958)

Sieb Kemme
- De opleiding tot wiskundeleraar in het Voortgezet Onderwijs (1958-heden)

Gert Schubring (Bielefeld)
- Die Entstehung des Mathematiklehrerberufs in Westeuropa in vergleichender Perspektive

Verder:
Posterpresentaties en tentoonstelling van oude boeken en dergelijke.

Deelname door overmaking van *f* 35,- op giro 4657326 t.n.v. HKRWO te Amsterdam (koffie, thee en lunch inbegrepen).

Het symposium wordt mede mogelijk gemaakt door subsidies van de Nederlandse Organisatie voor Wetenschappelijk Onderzoek (NWO), de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren (NVvW), de Nederlandse Vereniging tot Ontwikkeling van het Reken- en WiskundeOnderwijs (NVORWO) en door ondersteuning van het Freudenthal-Instituut (Fi).

Inlichtingen bij E. de Moor, tel. 020-6121382 of 030-2611611.

Regionale studiebijeenkomsten van de NVvW in 2001

Leiden: donderdag 29 maart 2001
Eindhoven: woensdag 4 april 2001
Zwolle: dinsdag 10 april 2001.

Zie voor het programma, e.d. het volgende nummer van Euclides en de website van de NVvW (*http://www.nvvw.nl*).

Oproep

Zebra-boekjes

De NVvW en Epsilon Uitgaven geven de Zebra-boekjes in de Zebra-reeks uit. Deze boekjes zijn in eerste instantie bedoeld voor leerlingen uit de hoogste klassen van het vwo.
In de diverse nieuwe wiskundeprogramma's (vwo-profielen) is een gedeelte met een omvang van 40 studielasturen gereserveerd voor keuzeonderwerpen, de zogenoemde zebra-ruimte. In deze zebra-ruimte wordt de leerlingen de gelegenheid geboden om zelfstandig of in (klein) groepsverband een of meerdere zelfgekozen onderwerpen te bestuderen en opdrachten uit te voeren die passen bij het gekozen profiel, de wiskunde in dat profiel en wellicht zelfs de toekomstige studie.
Zie de website van de NVvW voor een korte beschrijving van de boekjes (*http://www.nvvw.nl/janbreem.htm*).

Bestuur en redactie van Euclides zijn benieuwd naar het gebruik van de Zebra-boekjes.
Het bestuur, omdat men vooral wil weten OF de boekjes worden ingezet.
De redactie van Euclides, omdat men graag wil weten HOE de boekjes worden ingezet.
Mogelijk dat daarvan dan in Euclides verslag kan worden gedaan.

Gebruikers van de Zebra-boekjes wordt daarom verzocht één en ander te melden aan Kees Hoogland, hoofdredacteur van Euclides, via e-mail: *redactie-euclides@nvvw.nl.*

1226. Gegeven is de rechte l met vergelijking $y = 0{,}8x - 3$. Een daarmee evenwijdige rechte raakt de parabool k met vergelijking $y = -x^2 + ax + b$ in het punt $R(-2; 11{,}4)$.

De snijpunten van l en k zijn P en Q. Gevraagd:

a. de vergelijking van de grafiek, gevormd door de boog PRQ van k en de verlengden van het lijnstuk PQ;

b. de vergelijking van de grafiek, gevormd door het lijnstuk PQ en de verlengden van de boog PRQ van k.

W. A. v. d. Spek

1227. Van $\triangle$ ABC met $\alpha = 90°$ is BD de deellijn uit B. Construeer $\triangle$ ABC, als gegeven zijn AD en CD, zonder van de cirkel van Apollonius gebruik te maken.

R. Kooistra.

1228. Bewijs meetkundig voor de deellijn d_c in $\triangle$ ABC de ongelijkheid:

$$d_c \leqq {}^1/_2(a + b) \cos {}^1/_2\gamma.$$

R. Kooistra.

Vraagstukken uit Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde 48 (1960-1961)

De Centrale Examencommissie Vaststelling Opgaven vwo-havo-mavo-vbo (CEVO)

vraagt met ingang van 1 maart 2001

Een voorzitter voor de vaksectie wiskunde

die als lid van de CEVO wordt belast met het voorzitterschap van de vaksectie wiskunde voor de examens in het vmbo

Vereist voor het voorzitterschap van een vaksectie is:

- deskundigheid op het vakgebied;
- kennis van het onderwijs waarin het examen wordt afgenomen;
- onafhankelijkheid van uitgesproken stromingen, organisaties en leerboeken;
- inzicht in de eisen die het vervolgonderwijs stelt op het vakgebied;
- het vermogen leiding te geven aan het werk van de vaksectie.

en vereist voor het voorzitterschap van een vaksectie mavo en vbo:

- werkzaam in een leidinggevende positie in het op mavo en vbo volgende onderwijs, dan wel een functie in het hoger onderwijs die met mavo/vbo te maken heeft (bijv. nascholing lerarenopleiding)

Honorering:

De voorzitter van de vaksectie wiskunde wordt voor ca 15% van de volledige weektaak voor het werk van de CEVO vrijgesteld. Als dat niet mogelijk is kan een normbedrag worden toegekend plus een onkostenvergoeding.

Informatie:

De Centrale Examencommissie Vaststelling Opgaven is door de minister ingesteld. De commissie heeft als hoofdtaak het vaststellen van opgaven en daarbij behorende voorschriften voor de centrale examens in vbo, mavo, havo, vwo. De CEVO bestaat uit een algemeen bestuur en uit vaksecties.
De vaksecties stellen de opgaven vast, binnen de algemene aanwijzingen van het algemeen bestuur. Een vaksectie vmbo bestaat uit vier leden: een onafhankelijke voorzitter en drie leden, voorgedragen door onderwijsorganisaties.

Verdere informatie kan worden ingewonnen bij de voorzitter van de CEVO, drs. J. Bouwsma, telefoon 0519-293598, of bij het secretariaat van de CEVO, telefoon 079-3232602.

Sollicitaties:

Sollicitaties vóór 1 februari 2001 a.s. richten aan de CEVO, ter attentie van drs. J. Bouwsma, postbus 7107, 2701 AC Zoetermeer.

Aan hen die de aandacht willen vestigen op geschikte kandidaten, wordt eveneens verzocht deze schriftelijk te melden bij bovengenoemd adres.

Kalender

In deze kalender kunnen alle voor wiskundedocenten toegankeljke en interessante bijeenkomsten worden opgenomen.
Wil eenieder die relevante data heeft, deze zo spoedig mogelijk door geven aan de hoofdredacteur. Hieronder treft u de verschijningsdata aan van Euclides in het komende schooljaar. Achter de verschijningsdata is de deadline voor het inzenden van mededelingen vermeld. Doorgeven kan ook via e-mail: *redactie-euclides@nvvw.nl*

nr	verschijnt	deadline
5	17 februari 2001	04 januari 2001
6	31 maart 2001	15 februari 2001
7	16 mei 2001	29 maart 2001
8	27 juni 2001	10 mei 2001

zaterdag 20 januari 2001
7e Mathematische Modelleercompetitie
Universiteit Maastricht
Zie ook p. 114 in Euclides 76-3.

di. 23 t/m za. 27 januari 2001
NOT2001 - Onderwijs 3-dimensionaal
Nationale Onderwijs Tentoonstelling, Jaarbeurs, Utrecht

vr. 2 en za. 3 februari 2001
Nationale Wiskunde Dagen
Zie Euclides 75-8, p. 281.

donderdag 15 februari 2001
Gebruikersdag Netwerk

vrijdag 16 februari 2001
Gebruikersdag Moderne wiskunde

vrijdag 23 maart 2001 (gewijzigde datum)
Kangoeroe 2001
Aankondiging volgt later.

do. 19 en vr. 20 april 2001
37e Nederlands Mathematisch Congres
Vrije Universiteit, Amsterdam

vrijdag 20 april 2001
Lerarensymposium Wiskunde in de Tweede fase havo/vwo
Aankondiging volgt.

donderdag 26 april 2001
Nationale conferentie ICT in het wiskundeonderwijs
Organisatie APS en Freudenthal Instituut
Zie ook p. 141 in Euclides 76-3.

woensdag 16 mei 2001
Examens vwo B (os), vwo B1 en vwo B12 (ns)
maandag 21 mei 2001
Examens mavo/vbo C/D
woensdag 23 mei 2001
Examens havo A (os), havo A12 (ns)
woensdag 30 mei 2001
Examens havo B (os), havo B1 en havo B12 (ns)
donderdag 31 mei 2001
Examens vwo A (os), vwo A1 en vwo A12 (ns)
(os=oude stijl; ns=nieuwe stijl)

woensdag 20 juni
Examens 2e tijdvak

zaterdag 26 mei 2001
Symposium Historische Kring Reken- en Wiskundeonderwijs (HKRWO)
Hogeschool Domstad, Utrecht
Zie p.177 in dit nummer.

Regionale ICT-Onderwijsdagen

14 maart 2001 Amsterdam, RAI
21 maart 2001 Groningen, Martinihal
28 maart 2001 Rotterdam, Erasmus Expo- en Congrescentrum
11 april 2001 Den Bosch, Brabanthallen
18 april 2001 Zwolle, IJsselhallen
25 april 2001 Utrecht, Jaarbeurs

Voor internet-adressen zie de website van de NVvW: *http://www.nvvw.nl/Agenda2.html*

Publicaties van de
Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

* Zebra-boekjes
1. Kattenaids en Statistiek
2. Perspectief, hoe moet je dat zien?
3. Schatten, hoe doe je dat?
4. De Gulden Snede
5. Poisson, de Pruisen en de Lotto
6. Pi
7. De laatste stelling van Fermat
8. Verkiezingen, een web van paradoxen

Prijzen van de Zebra-boekjes:
Schoolabonnement: 6 exemplaren van 5 delen voor *f* 400,-
Individueel abonnement voor leden: *f* 75,-
Losse boekjes voor leden: *f* 16,50
Deze bedragen zijn inclusief verzendkosten.
Bestellen kan door het juiste bedrag over te maken op Postbanknummer 5660167 t.n.v. Epsilon Uitgaven te Utrecht onder vermelding van Zebra (1 t/m 5) of Zebra (6 t/m 10). Zelf ophalen kan in de losse verkoop; ledenprijs op bijeenkomsten *f* 12,50; in de betere boekhandel *f* 16,75.

* Nomenclatuurrapport Tweedefase havo/vwo
Dit rapport en oude nummers van Euclides (voor zover voorradig) kunnen besteld worden bij de ledenadministratie, zie colofon.

* Wisforta - wiskunde, formules en tabellen
Formule- en tabellenboekje met formulekaarten havo en vwo, de tabellen van de binomiale en de normale verdeling, en toevalsgetallen.
ISBN 900165956X; prijs f 15,00; te bestellen in de boekhandel

adv Casio

